Annexe 2- Solution « exacte » du calcul de v_{out}

La solution recherchée est de la forme : $v_3(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + B\sin(\omega t + \varphi) + \frac{V_s}{2}$

On injecte cette solution dans l'équation différentielle, on développe les $\sin(\omega t + \varphi)$ et $\cos(\omega t + \varphi)$ puis on factorise. En posant pour alléger $b = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\omega V_1$, on obtient :

$$B\left\{\frac{1}{\tau}\cos(\varphi) - \omega\sin(\varphi)\right\}\sin(\omega t) + \left\{B\left(\omega\cos(\varphi) + \frac{1}{\tau}\sin(\varphi)\right) - b\right\}\cos(\omega t) = 0$$

Cette équation ne peut être vérifiée à toute date que si les deux facteurs devant les fonctions trigonométriques sont nuls. Ces deux conditions imposent $\tan(\varphi) = \frac{1}{\omega\tau}$ et $B = b\,\tau\sin(\varphi)$

La solution devient après simplification : $v_3(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}V_1\cos(\varphi)\sin(\omega t + \varphi) + \frac{V_s}{2}$

La constante A resterait à déterminer à partir de la condition initiale sur v_3 . Mais cela n'a cependant pas d'importance car après un court transitoire, le terme exponentiel décroît vers 0 : v_3 est alors en régime permanent. A est éliminé du calcul.

Soit en régime permanent $v_3(t) = \frac{V_s}{2} + \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}V_1\cos(\varphi)\sin(\omega t + \varphi)$

Soit v_4 issue de la multiplication de v_3 par v_1 , avec le facteur de multiplication K (en V^{-1}) :

$$v_4(t) = K\,v_3 \times v_1 = K\left(\frac{V_s}{2} - \frac{L}{d}V_1\cos(\varphi)\sin(\omega t + \varphi)\right) \times \left(\frac{V_s}{2} + V_1\sin(\omega t)\right)$$

$$v_4(t) = K\left(\left(\frac{V_s}{2}\right)^2 - \frac{V_s}{2}\frac{L}{d}V_1\cos(\varphi)\sin(\omega t + \varphi) + \frac{V_s}{2}V_1\sin(\omega t) - \frac{L}{d}V_1^2\cos(\varphi)\sin(\omega t + \varphi)\sin(\omega t)\right)$$

or $\sin(\omega t + \varphi)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}\left\{\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)\right\}$ fait apparaître un second terme constant.

La tension v_4 peut donc se mettre sous la forme d'un terme constant global et d'un terme oscillant composite.
Soit après l'amplificateur « tampon » d'amplification K' pour élaborer le signal à filtrer. On détermine donc la tension $v_5(t) = K'\,v_4(t)$

$$\begin{aligned} v_5(t) = {} & KK'\left(\left(\frac{V_s}{2}\right)^2 - \frac{L}{2d}V_1^2\cos^2(\varphi)\right) \\ & + KK'\left(-\frac{V_s}{2}\frac{L}{d}V_1\cos(\varphi)\sin(\omega t + \varphi) + \frac{V_s}{2}V_1\sin(\omega t) + \frac{L}{2d}V_1^2\cos(\varphi)\cos(2\omega t + \varphi)\right) \end{aligned}$$

On extrait la moyenne de la tension v_5 . Donc $v_{out} = \langle v_5 \rangle = KK'\left(\frac{V_s}{2}\right)^2 - KK'\frac{L}{2d}V_1^2\cos^2(\varphi)$

Le système fonctionne en capteur d'accélération car : $L = -\frac{m}{2k}a$

D'où $v_{out} = KK'\left(\frac{V_s}{2}\right)^2 + KK'\frac{m}{4kd}V_1^2\cos^2(\varphi)\,a$

Deux remarques :

- La condition $\omega\tau \gg 1$ implique avec $\tan(\varphi) = \frac{1}{\omega\tau}$ que $\varphi \approx 0$ et donc que $\cos(\varphi) \approx 1$.

- « L'exactitude » de cette solution est à mettre en rapport avec l'hypothèse de simplification par restriction aux premiers harmoniques. L'erreur de non-linéarité prend en compte ces approximations.