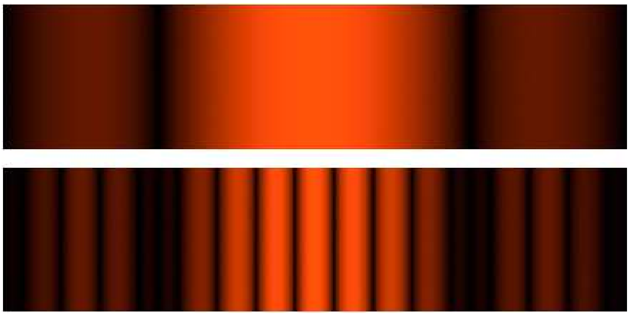
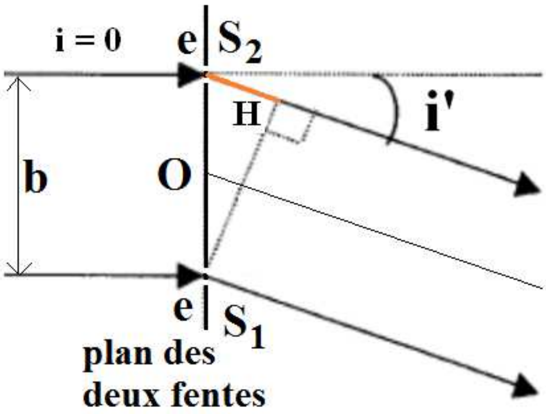
SURFACES DIFFRACTANTES MULTIPLES
Interférence par division du front d'onde ?

1- Diffraction à l'infini par deux fentes fines (dites « fentes d'Young »)

Le faisceau lumineux est diaphragmé par deux fentes fines de **largeur e** (e << h hauteur de la fente) séparée de la **distance b**. La lumière observée sur un écran à une distance suffisante pour être considéré comme « à l'infini ».



Observation faite sur un écran éloigné en éclairant une seule fente avec un laser rouge, puis en éclairant les deux fentes



On éclaire avec une diode laser à 650 nm deux fentes de largeur 500 µm, espacées de 1.2 mm. On observe l'éclairement obtenu sur un écran situé à 1.50 m des fentes.

Q1a- Rappeler l'expression de l'intensité émise dans la direction i' par une fente fine éclairée par une onde plane. En déduire l'expression de l'éclairement reçu par un écran, suffisamment éloigné pour que l'on considère que tous les points éclairés sont à une distance quasi identique de la fente. Calculer la largeur de la tache centrale.

On considère que le faisceau incident (par exemple produit par un laser de TP) se comporte comme une onde plane cohérente spatialement éclairant le plan des fentes.

Les deux fentes placées en S_1 et S_2 se comporteront donc a priori comme **deux sources secondaires cohérentes**. Les deux ondes émises sont ainsi produites par **« division du front d'onde » :** elles pourraient donc interférer.

Q1b- On considère maintenant les deux ondes produites par « division du front d'ondes » quittant en même temps le plan des fentes.

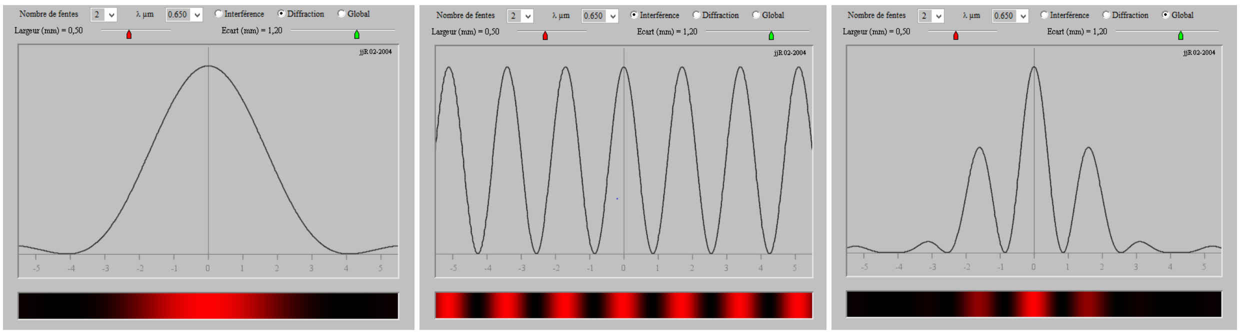
- Faire une figure raisonnablement à l'échelle montrant les deux trajets optiques vers le point de l'écran. Identifier et calculer le chemin optique supplémentaire $\delta = [S_2H]$.

- Si l'onde 1 reçue en P' et issue du point S_1 *est* $a_1(t,r) = A\, e^{j(\omega t - kD)}$ *avec* $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ *, exprimer la seconde onde issue du point* S_2 $a_2(t,r) = ?$

- Donner l'amplitude résultant des deux ondes cohérentes reçues. En déduire l'expression décrivant l'évolution de l'éclairement sur l'écran du fait de l'interférence entre ces deux ondes.

- Préciser le lieu des franges les plus brillantes. Calculer l'interfrange.

Q1c- Donner l'expression globale décrivant l'évolution de l'éclairement sur l'écran qui tient compte de l'interférence entre les deux ondes mais aussi de la diffraction au travers de chacune des fentes. Faire le lien avec les observations. Combien constatera-t-on de franges brillantes dans la tache centrale de diffraction ?

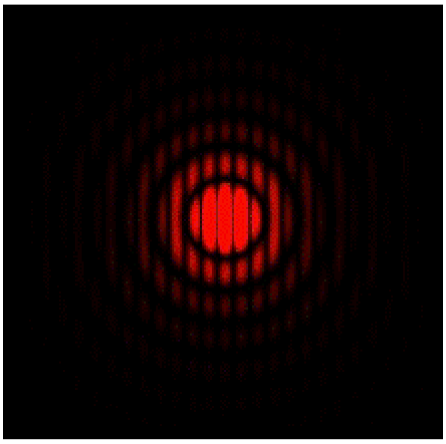
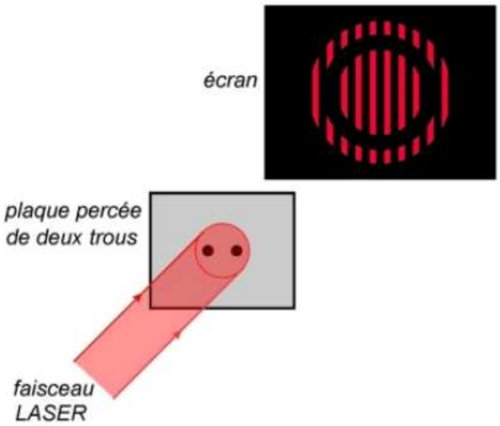


$$\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \qquad \times 2\left\{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \delta\right)\right\} \quad E_0 = E_s(P')$$

Voir évidemment vos réponses à Q1a- et Q1b- pour les expressions de u et δ

Une étude complémentaire devrait examiner les conditions géométriques sur le faisceau incident pour assurer la cohérence spatiale dans le cas d'une source étendue.

Situation comparable : interférences par deux trous d'Young

On constate que l'éclairement obtenu présente là aussi :
- une série de franges parallèles obtenues de la même façon que pour les deux fentes d'Young (même formule d'interfrange etc.)
- une modulation de l'éclairement par la figure de diffraction de l'orifice, ici un trou circulaire.

Lieus des franges :

Dans les deux cas **les franges sont localisées à l'infini**

2- Diffraction à l'infini par N fentes fines, régulièrement réparties

2.1- Expression de l'éclairement reçu sur un écran

Soient N fentes fines et parallèles de largeur e, répartie régulièrement dans un plan. Deux fentes successives sont séparées de b.

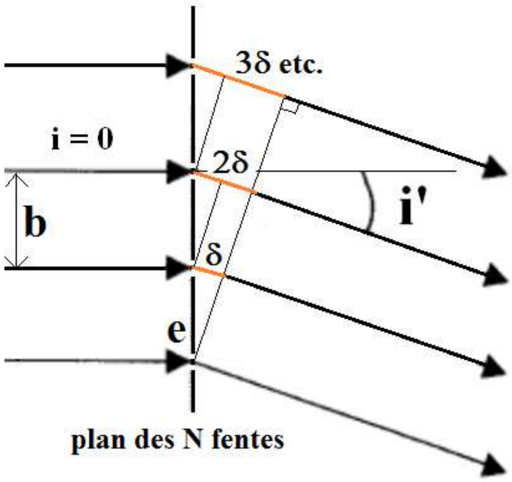
Une onde plane cohérente spatialement éclaire l'arrière du plan des fentes en créant N ondes secondaires **par division du front d'onde**.

Entre deux ondes successives, on constate un surplus de chemin optique $\delta = b \sin i'$

L'amplitude diffractée par la p-ième fente dans la direction i' est donc :

$a_p(t,r) = a_{p-1}(t,r) \times e^{-jk\delta}$

$a_p(t,r) = = A_0 \times e^{-jpk\delta}$



L'amplitude totale diffractée dans cette direction est, puisqu'il s'agit d'une suite géométrique :

$$a_{total}(t,r) = \sum_{p=0}^{N-1} A_0 \times e^{-jpk\delta} = A_0 \frac{1-e^{-jNk\delta}}{1-e^{-jk\delta}} a_{total}(t,r)$$

$$= A_0 \times \frac{e^{-jNk\delta/2}}{e^{-jk\delta/2}} \times \frac{e^{+jNk\delta/2} - e^{-jNk\delta/2}}{e^{+jk\delta/2} - e^{-jk\delta/2}}$$

$$= A_0 \times \frac{e^{-jNk\delta/2}}{e^{-jk\delta/2}} \times \frac{2j\ \sin(Nk\delta/2)}{2j\ \sin(k\delta/2)}$$

L'éclairement reçu en un point P' de l'écran est proportionnel à la moyenne $\langle a_{total} \times a_{total}{}^{*} \rangle$ soit

$$E = K \left\langle \left[A_0 \times \frac{e^{-jNk\delta/2}}{e^{-jk\delta/2}} \times \frac{\sin(Nk\delta/2)}{\sin(k\delta/2)}\right] \times \left[A_0 \times \frac{e^{+jNk\delta/2}}{e^{+jk\delta/2}} \times \frac{\sin(Nk\delta/2)}{\sin(k\delta/2)}\right]^{*} \right\rangle$$

$$E = K\,A_0^2 \times \left\langle \left[\frac{\sin(Nk\delta/2)}{\sin(k\delta/2)}\right]^2 \right\rangle \quad \text{puisque} \quad \frac{e^{+jNk\delta/2}}{e^{+jk\delta/2}} \frac{e^{-jNk\delta/2}}{e^{-jk\delta/2}} = \frac{1}{1=1}$$

Si l'onde incidente est cohérente, la moyenne ne s'annule pas.
On obtient alors une évolution de l'éclairement du aux effets d'interférence :

$$E = E_0 \times \left[\frac{\sin(Nk\delta/2)}{\sin(k\delta/2)}\right]^2$$

La diffraction par chacune des N fentes interviendra de la même façon qu'au §1 en venant moduler l'éclairement reçu.

Dans le cas où il y a un angle d'incidence i non nul, on obtient le résultat en symétrisant u et u' :

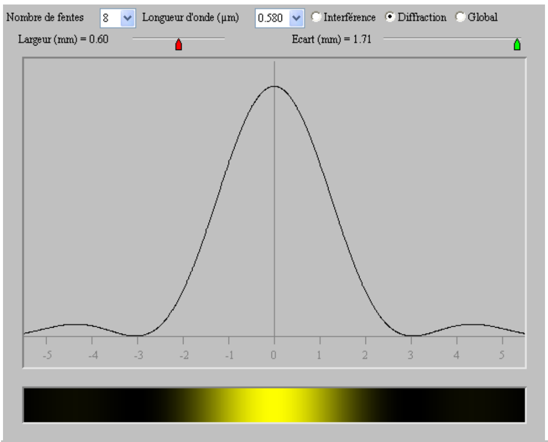
$$\boxed{E = N^2 E_0 \times \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 \times \left(\frac{\sin(N\ u')}{N\ \sin(u')}\right)^2}$$

avec $u = \dfrac{\pi e\,(\sin i\ ' + \sin i)}{\lambda}$

et $u' = \dfrac{\pi b\,(\sin i\ ' + \sin i)}{\lambda}$

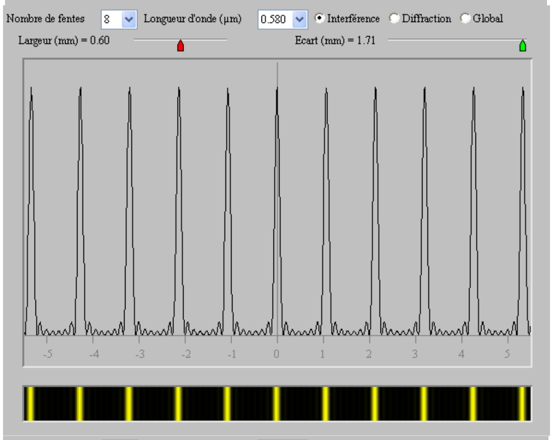
$$E = E_0 \times \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 \; N^2 \left(\frac{\sin(N\;u')}{N\;\sin(u')}\right)^2$$

terme de diffraction par une fente



$$E = E_0 \times \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 \times N^2 \left(\frac{\sin(Nu')}{N\sin(u')}\right)^2$$

terme d'interférence à N ondes

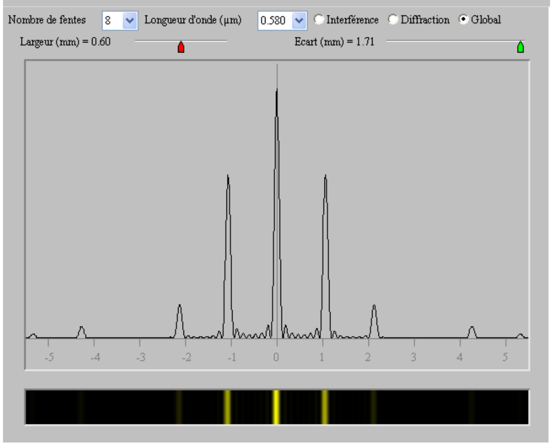


$$E = N^2 E_0 \times \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 \times \left(\frac{\sin(N\;u')}{N\;\sin(u')}\right)^2$$

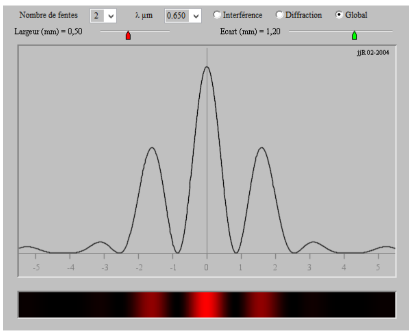
phénomène global

avec $u = \dfrac{\pi e (\sin i\;' + \sin i)}{\lambda}$

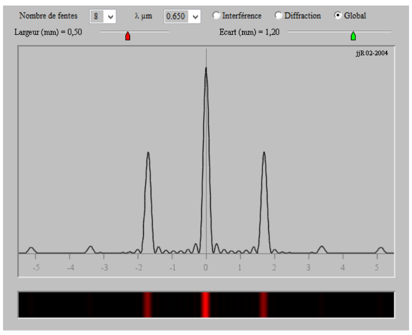
et $u' = \dfrac{\pi b\,(\sin i\;' + \sin i)}{\lambda}$



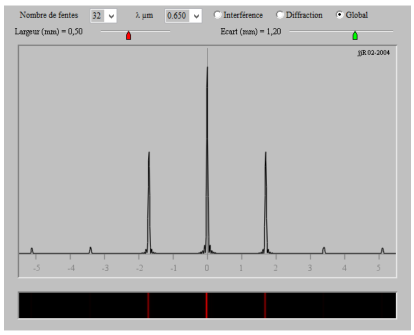
2.2- Evolution du phénomène en fonction du nombre de fentes N



2 fentes



8 fentes



32 fentes

On remarque que l'éclairement global varie comme N² en situation d'interférences.

Plus N est grand, plus les raies observées correspondant aux différents ordres d'interférence sont fines. On peut donc se restreindre à l'étude des maxima principaux d'éclairement.

2.3- Analyse de la courbe d'éclairement : étude des maxima

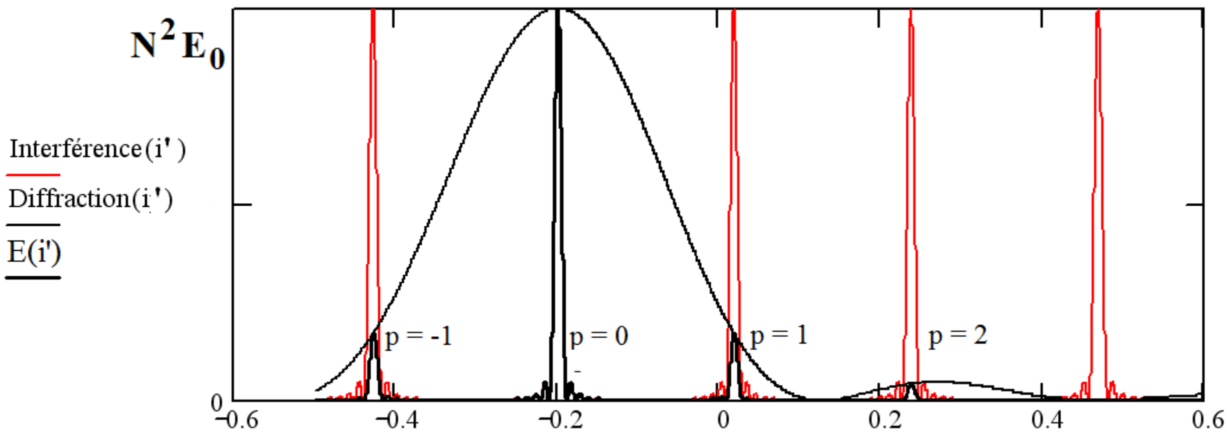
- Maximum principal de la fonction d'éclairement : ordre 0

$E_{\max} = N^2 E_0$ est obtenu pour $u' = p\pi = \dfrac{\pi\, b\,(\sin i' + \sin i)}{\lambda} = 0$

Cela correspond au cas p = 0 appelé « ordre 0 » pour lequel $\sin i' + \sin i = 0$ et aussi u = 0 !

Avec les développements limité au 1[er] ordre, on a $\dfrac{\sin(Nu')}{N\,\sin(u')} \approx \dfrac{(N u')}{N(u')} \approx 1$ et $\dfrac{\sin(u)}{u} \approx \dfrac{u}{u} \approx 1$

- **L'ordre p = 0 est le plus lumineux** avec $E_{max} = N^2 E_0$
- $\sin i' + \sin i = 0$ → i' = - i où la lumière n'est pas déviée (cf. convention de signe des réseaux).



Simulation sous Mathcad de E(i') pour l'angle d'incidence i = + 0.2 radian

- Maxima secondaires de la fonction d'éclairement : ordre p ≠ 0

si $u' = \dfrac{\pi\, b(\sin i' + \sin i)}{\lambda} = p\pi$ avec p entier relatif non nul, alors $\sin(u') = 0$ et $\sin(N u') = 0$.

Donc le rapport $\dfrac{\sin(Nu')}{N\,\sin(u')} \approx \dfrac{(N u')}{N(u')} \approx 1$ et aussi $E \approx N^2 E_0 \left(\dfrac{\sin(u)}{u}\right)^2$.

Ces cas de nullité de sin(N u’) correspondent aux maxima secondaires de E (c'est-à-dire les pics noirs de la courbes observée correspondants aux pics en rouge d’interférence « pure »).

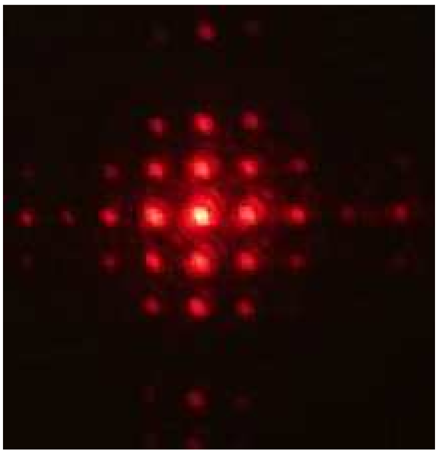
- Valeurs i’ pour les maxima secondaires données par $\frac{b(\sin i' + \sin i)}{\lambda} = p$
- **L’entier p est le numéro de l’ordre d’interférence**.
- Ces valeurs correspondent aux **maxima successifs de la fonction d’éclairement** (interférences constructives).
- La **luminosité décroit** lorsque le numéro d’**ordre |*p*| augmente**.

2.4- Un réseau plan correspond à cette situation avec N très grand

3- Diffraction à l’infini par N objets répartis aléatoirement

3.1- Objets identiques répartis régulièrement : réseau 1D ou 2D

Si des orifices (fente rectangulaire, trou circulaires etc.) sont répartis régulièrement selon un maillage périodique, la figure obtenue présentera une répartition d’éclairement présentant des propriétés géométriques associées (cf. méthodes de l’optique de Fourier)



L’exemple ci contre est obtenu avec un ensemble de trous carrés formant un quadrillage : double répartition croisée comme avec un réseau à deux dimensions.

Les figures obtenues sont complexes à déchiffrer lorsqu’il y a des répartitions avancées (en triangle, en hexagone etc.).

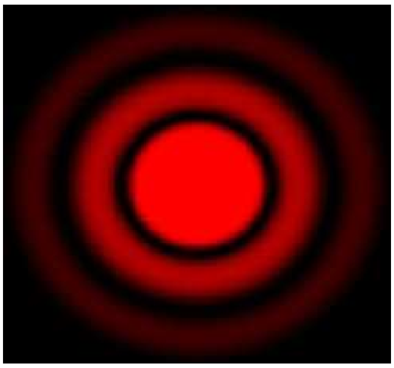
Le calcul montre que l’éclairement global varie comme N² en situation d’interférences. $E_{interférence} = N^2 E_0$

Le théorème de Babinet prévoit des résultats de même nature pour un maillage de fils.

Application : test optique de qualité de réalisation de tissages très fins

Remarque : la diffraction des rayons X en cristallographie relève de la même problématique.

3.2- Objets identiques répartis aléatoirement



Si des objets (en creux : trous, ou en plein : poudre, éléments granulaires) sont répartis aléatoirement dans le plan diffractant, les différentes ondes secondaires sont incohé-rentes et présentent des phases variant aléatoirement de sorte que le terme d'interférence est nul en moyenne.

L'éclairement global est la somme des éclairements pour chacun des objets lorsqu'ils sont répartis aléatoirement.

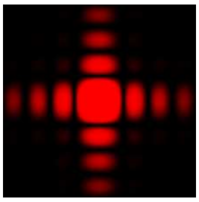
$E_{aléatoire} = N\ E_0$

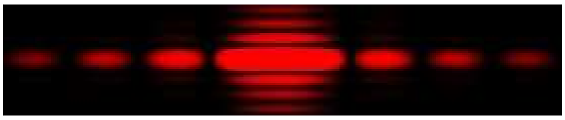
Globalement la figure obtenue est la figure de diffraction de l'objet élémentaire mais plus lumineuses.
L'exemple est celui d'une plaque percée irrégulièrement par un ensemble de trous circulaires.

Le théorème de Babinet prévoit des résultats de même nature pour un ensemble de masque complémentaires des orifices comme de petits disques ou des microbilles.

Application : test optique de **granulométrie**

La connaissance des figures de diffraction élémentaires permet d'identifier les principales formes de grains ou de trous testés.

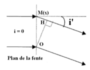




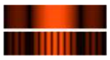
diffraction par un trou rectangulaire, de hauteur 5 fois plus grande que la largeur

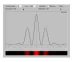
Les figures obtenues seront évidemment plus complexes à déchiffrer s'il y a un mélange de forme d'objets…

Sources des illustrations et des simulations



Optique physique par F. Weil 11/2005 Collection Technosup ELLIPSES

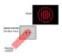




etc.

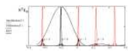
http://fabrice.sincere.pagesperso-orange.fr/cm_optique/optique_ondulatoire_ch2_20/opt%20ondulatoire%20ch2%20v2.0web.pdf
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optiphy/reseau2.html

http://christrole.free.fr/tsg/optique/O6_fichiers/Page559.htm



http://www.maxicours.com/se/fiche/7/1/410471.html

http://physique-watteau.perso.sfr.fr/ts/chap3/doc/diffraction/trou1circulaire_rouge.jpg



Calcul personnel

http://melusine.eu.org/syracuse/mluque/fresnel/augustin/diffractionbord.html

Simulation :

Fentes d'Young, interférences à 2 ou N ondes
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optiphy/reseau2.html