

INTERFERENCES A 2 ONDES

1- Superpositions de deux ondes monochromatiques : conditions d'interférence

L'amplitude totale résultant de la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de pulsation ω_1 et ω_2 est :

$$a_s(t, x) = a_1(t, x) + a_2(t, x) = A_1 e^{j(\omega_1 t - \varphi_1)} + A_2 e^{j(\omega_2 t - \varphi_2)}$$

L'éclairement résultant en un point donné P est donné par :

$$E_s(P) = K \times \langle (a_s(t, x)) \times (a_s(t, x))^* \rangle \quad (\text{où } z^* \text{ est le complexe conjugué de } z)$$

$$E_s(P) = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \times \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2)) \rangle$$

Q1a- Démontrer ce résultat préliminaire (rappel : $\cos b = (e^{jb} + e^{-jb}) / 2$) puis discuter des conditions d'interférences.

Discussion :

- Les ondes proviennent de deux sources différentes avec $\omega_1 \neq \omega_2$ (couleurs non strictement identiques !)

$$\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2)) \rangle = \langle \cos(at + b) \rangle = 0$$

Deux sources de lumières de couleurs différentes n'interfèrent pas

$$\rightarrow E_{s \omega_1 \neq \omega_2}(P) = E_1 + E_2 \quad \text{simple addition des deux éclairagements}$$

- Les ondes proviennent de deux sources différentes avec $\omega_1 = \omega_2$

$$E_{s \omega_1 = \omega_2}(P) = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \times \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle$$

Mais si les deux ondes proviennent de deux trains d'ondes « incohérents » $\varphi_2 - \varphi_1$ varie aléatoirement et la moyenne est encore nulle.

Deux trains d'ondes incohérents n'interfèrent pas

$$\rightarrow E_{s \text{ incohérent}}(P) = E_1 + E_2$$

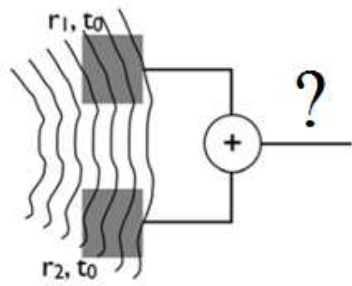
- Les deux ondes proviennent de trains d'ondes « cohérents » (le plus souvent issus du même train d'onde : voir plus loin les deux procédés possibles appelés « division d'amplitude » et « division du front d'ondes »).

Deux trains d'ondes cohérents interfèrent

$$\rightarrow E_{s \text{ cohérent}}(P) = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos(\Delta\varphi(r))$$

L'éclairement est alors modulé spatialement de façon spécifique selon l'interféromètre utilisé.

→ possibilité d'exploitation en mesure.



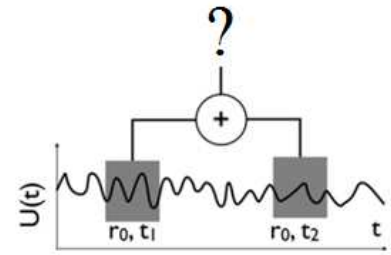
cohérence spatiale ?

2 trains d'ondes
« incohérents »

$$E_{s \text{ incohérent}}(P) = E_1 + E_2$$

ou alors « cohérents » ?

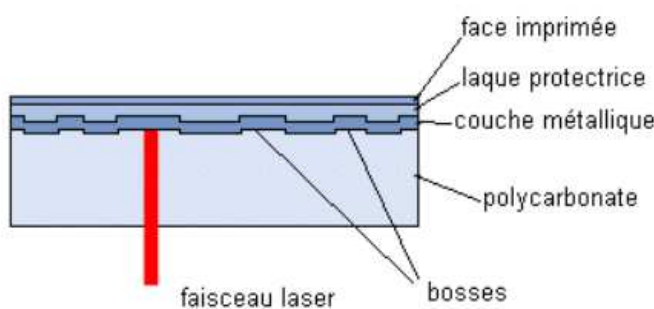
$$E_{s \text{ cohérent}}(P) = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos(\Delta\varphi(r))$$



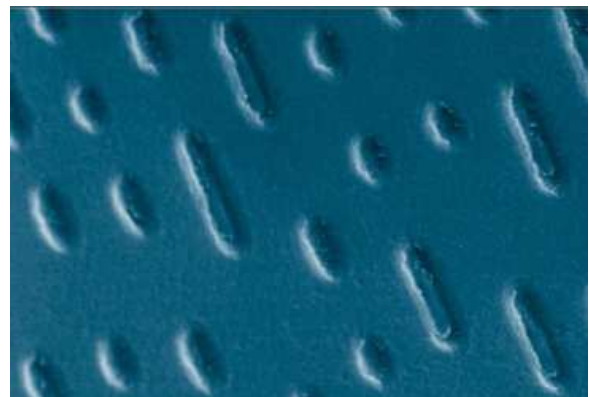
cohérence temporelle ?

A discuter selon l'interféromètre étudié

Stockage de données numériques dans un CD



Laser de lecture IR à 780 nm,
indice de réfraction du polycarbonate 1,55



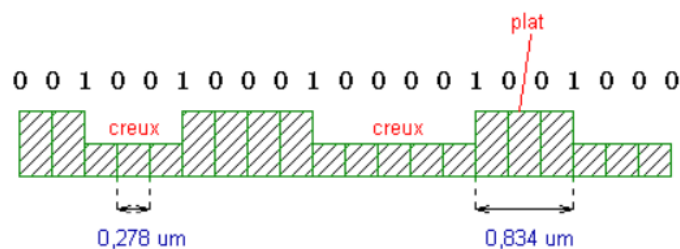
Les informations numériques sont stockées dans un CD sous la forme d'un long sillon formant une spirale dont le pas est 1,6 μm. Le sillon est gravé dans du polycarbonate revêtu d'une couche métallique réfléchissante. Le sillon présente des creux de profondeur 125 nm, de largeur 0,6 μm, de longueur variant entre 0,84 et 3,3 μm.

Q1b- Calculer la différence de « marche » (ou différence de « chemin optique ») $\delta = n L$ entre deux ondes du faisceau de lecture lorsque le faisceau éclaire perpendiculairement :

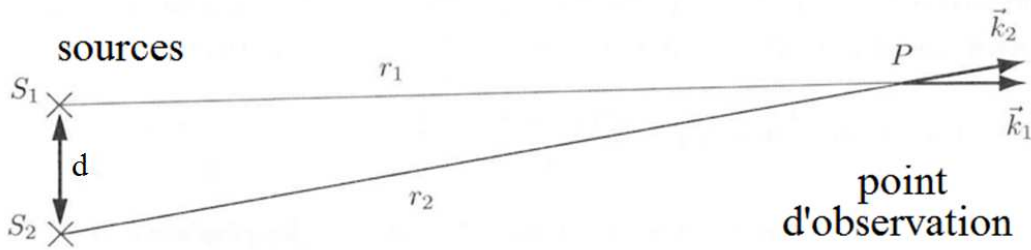
- pour moitié un creux, pour moitié un plat
- uniquement un creux ou un plat

En déduire dans ces deux cas, l'écart de phase $\Delta\varphi$ entre les deux ondes envisagées.

En déduire le principe physique du codage mis en œuvre.



2- Figures d'interférence pour deux sources ponctuelles



Par un procédé à définir selon l'interféromètre concerné, on dispose de deux sources similaires ponctuelles, monochromatiques, synchrones et distantes de d :

$$a_s(t, r) = a_1(t, r_1) + a_2(t, r_2) = \frac{A}{r_1} e^{j(\omega t - kr_1)} + \frac{A}{r_2} e^{j(\omega t - kr_2)} \quad \text{avec } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On note $\mathbf{E}_1 = \left(\frac{A}{r_1}\right)^2$ et $\mathbf{E}_2 = \left(\frac{A}{r_2}\right)^2$ les éclairements en P dus à chaque source prise séparément.

$$\rightarrow \mathbf{E}_{s \text{ cohérent}}(\mathbf{P}) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + 2\sqrt{\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2} \cos(\Delta\varphi(\mathbf{r}))$$

En pratique on a toujours $r \approx r_1 \approx r_2 \gg d$ (typiquement 30 cm \gg 1 mm)

On suppose donc que $\mathbf{E}_1 \approx \mathbf{E}_2 \approx \mathbf{E}_0 \approx \left(\frac{A}{r}\right)^2$

$$\rightarrow \mathbf{E}_{s \text{ cohérent}}(\mathbf{P}) = 2 \mathbf{E}_0 \{1 + \cos(\Delta\varphi(\mathbf{r}))\}$$

Différence de phase au point P :

La différence de phase entre les deux ondes arrivant en P est :

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_2 - \varphi_1 = kr_2 - kr_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = 2\pi \frac{n}{\lambda_0} (r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times n (r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \delta$$

où n est l'indice de réfraction du milieu optique et λ_0 la longueur d'onde dans le vide.

Différence de « marche » ou différence de « chemin optique » $\delta = n (r_2 - r_1)$

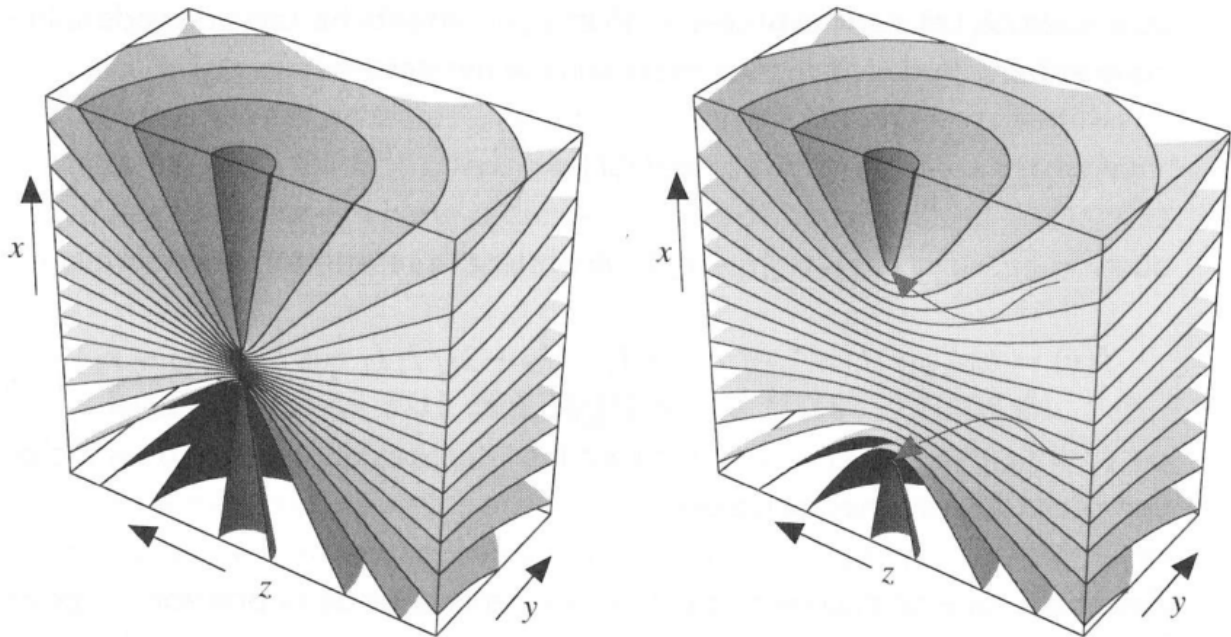
Attention : $[r] = n \times r$ est le « chemin optique » \neq du simple trajet géométrique r .

$$\mathbf{E}_{s \text{ cohérent}}(\mathbf{P}) = 2 \mathbf{E}_0 \left\{ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \delta\right) \right\} = 2 \mathbf{E}_0 \left\{ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times n (r_2 - r_1) \right) \right\}$$

Indicateur de l'état d'interférence entre les 2 ondes

Tout dépend de la comparaison des situations des 2 ondes et de leur décalage exprimé comme une fraction de période $\frac{\Delta\varphi(r)}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda_0}$ il y a trois cas :

- **Interférences « constructives »** δ est multiple entier de λ_0 où $p \in \mathbb{Z}$ a priori donc $\frac{\Delta\varphi(r)}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda_0} = p$
 $\rightarrow \cos(\Delta\varphi(r) = p \times 2\pi) = 1 \rightarrow E_{s\max}(M) = 2 E_0 \{1 + 1\} = 4 E_0$
- **Interférences « destructives »** δ est multiple à un $\frac{1}{2}$ entier près entier de λ_0 où $p \in \mathbb{Z}$ donc $\frac{\Delta\varphi(r)}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda_0} = p + 0,5$
 $\rightarrow \cos((p + 0,5) \times 2\pi) = -1 \rightarrow E_{s\min}(M) = 2 E_0 \{1 - 1\} = 0$
- **Interférences « intermédiaires »** δ / λ_0 est un réel quelconque
 $\rightarrow -1 < \cos\left(\frac{\delta}{\lambda_0} \times 2\pi\right) < 1 \rightarrow 0 < E_{s\text{intermédiaire}}(M) < 4 E_0$

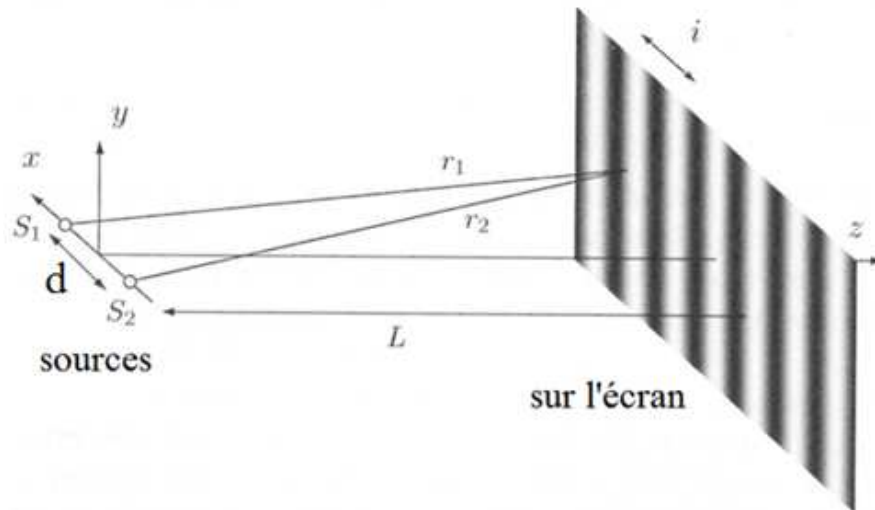


Vue en coupe des surfaces sur lesquelles les interférences issues des sources (indiquées par les flèches) sont constructives.

A droite, un zoom sur la partie centrale de la figure de gauche.

3- Observation de franges d'interférence

Sur un écran placé dans un plan parallèle à l'axe Ox portant les deux sources, on observe au voisinage du plan $x = 0$ des franges quasi rectilignes (tangentes à l'origine des hyperboles de la figure précédente).



Représentation schématique des sources et de la position de l'écran d'observation

$$r_1 = \sqrt{L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} = L \sqrt{1 + \left(\frac{x - d/2}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} = L \sqrt{1 + \left(\frac{x + d/2}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}$$

Un **développement limité** au 1^{er} ordre suffira : $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ lorsque $\epsilon \ll 1$

On constate ici que $L \gg x, y$ ou d donc $x/L, y/L$ ou $d/L \ll 1$ Donc

$$\sqrt{1 + \left(\frac{x - d/2}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{x - d/2}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{L}\right)^2 \right\}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{d/2}{L}\right)^2 - \frac{x \times d/2}{L} + \left(\frac{y}{L}\right)^2 \right\}$$

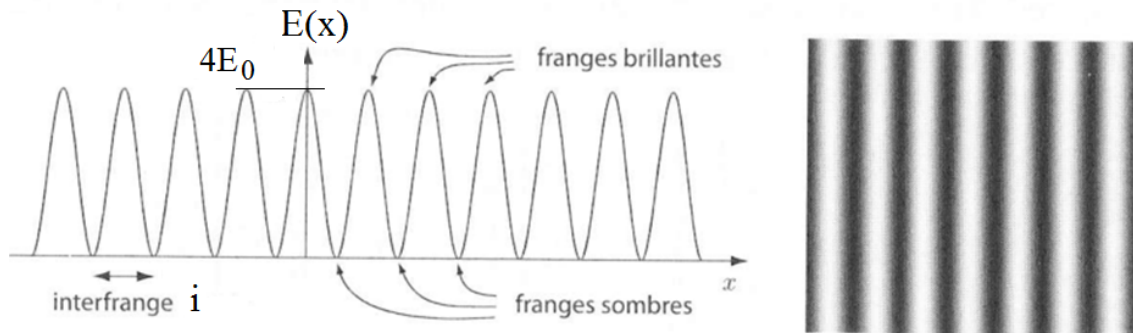
On trouve $r_1 \approx L + \frac{x^2}{2L} - \frac{dx}{2L} + \frac{y^2}{2L} + \frac{d^2}{8L}$ et $r_2 \approx L + \frac{x^2}{2L} + \frac{dx}{2L} + \frac{y^2}{2L} + \frac{d^2}{8L}$

Le calcul au 1^{er} ordre suffit puisque le résultat dépend de x . En effet :

Différence de « marche » $\delta = n (r_2 - r_1)$

$$\delta = n (r_2 - r_1) \approx n \times 2 \frac{dx}{2L} \rightarrow \delta = \frac{ndx}{L}$$

$$\rightarrow E_{s \text{ franges}}(x) = 2 E_0 \left\{ 1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \delta \right) \right\} = 2 E_0 \left\{ 1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{ndx}{L} \right) \right\}$$



Distribution de l'éclairement reçu sur l'écran et figure des franges d'interférence

Interfrange : distance i entre deux franges voisines, séparant deux maxima successifs du cosinus, soit un déphasage de 2π

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{nd x_{p+1}}{L} - \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{nd x_p}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{nd (x_{p+1} - x_p)}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{nd i}{L} = 2\pi$$

$$\rightarrow \frac{nd i}{\lambda_0 L} = 1 \rightarrow i = \frac{\lambda_0 L}{nd}$$

4- Contrôle de la planéité d'un miroir avec un interféromètre de Fizeau

Deux lames de verre à faces parallèles forment un coin d'air d'angle α très petit. On éclaire l'ensemble à l'aide d'un faisceau parallèle de lumière monochromatique jaune issu d'une lampe au sodium ($\lambda = ?$), dont l'incidence est **normale** à la lame supérieure. On observe des franges parallèles à l'arête du coin.

Q4.1- Indiquer sur un schéma (où l'angle α est exagéré) les deux vibrations qui interfèrent. Où sont localisées les franges d'interférence ?

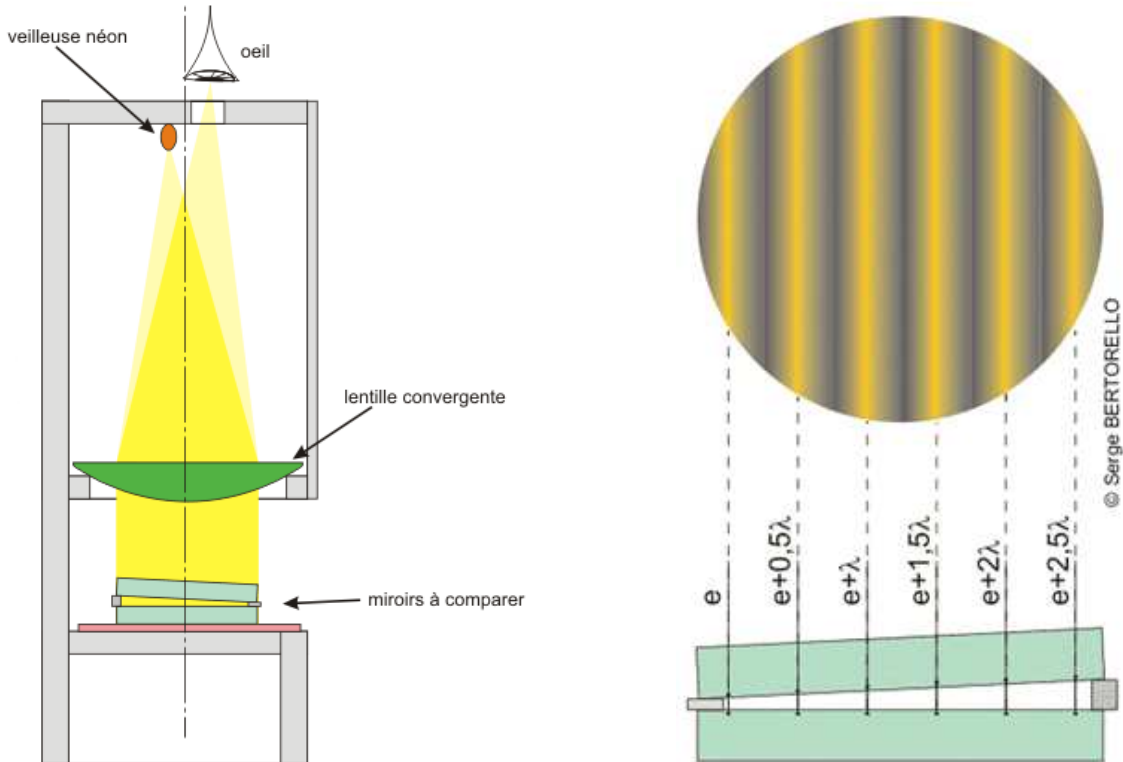
Q4.2- Donner l'expression de la différence de marche en un point P sur la lame supérieure en fonction de la distance $x = OP$ (entre P et l'arête du coin) et de α .

Q4.3- En déduire le lieu des franges brillantes et l'expression de l'interfrange en fonction de α .

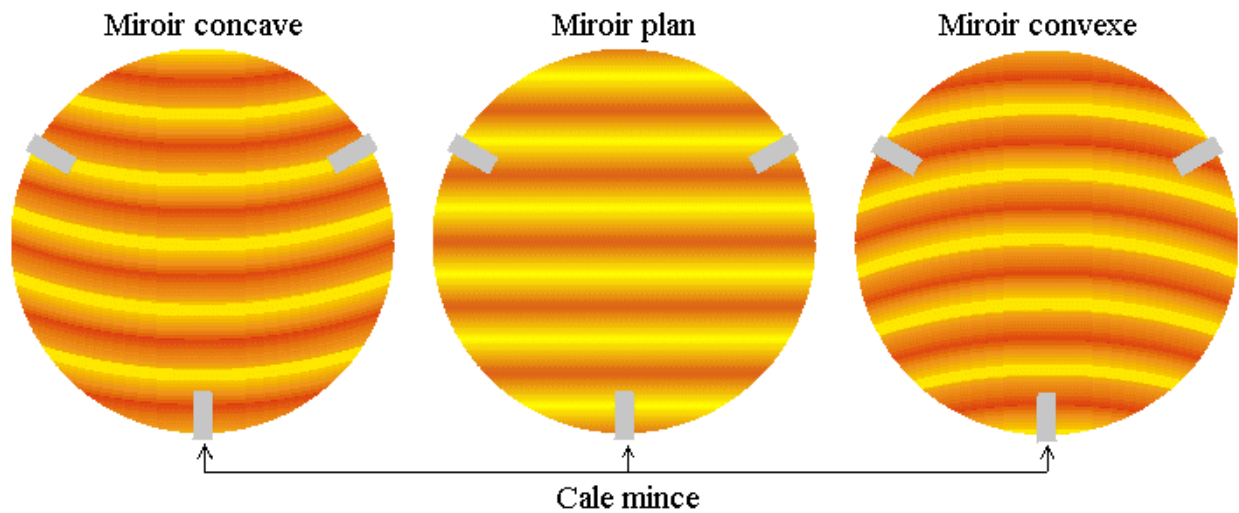
Q4.4- Le miroir a une longueur de 150 mm, la cale utilise une épaisseur de 0,1 mm. Calculer α en radian. En déduire la valeur de l'interfrange.

Q4.5- Montrer qu'on a un dispositif à franges « d'égale épaisseur ». A quelle augmentation d'épaisseur correspond un déplacement d'un interfrange ?

Dispositif pratique de test : le miroir inférieur qui est métallisé, sert de référence. La lame supérieure est en cours de ponçage (elle n'est pas encore métallisée et la lumière peut la traverser).



Voir <http://serge.bertorello.free.fr/plan/plan.html>



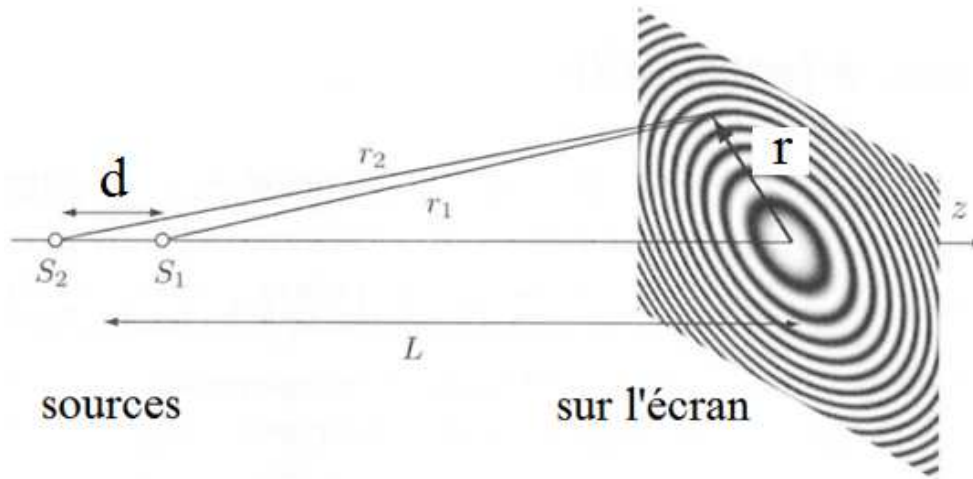
Lorsque l'un des deux miroirs est parfaitement plan (miroir inférieur) et que la cale mince est dirigée vers l'observateur, les franges observées ont la même forme que le profil de la lame supérieure (le miroir en cours de fabrication).

→ En fin de ponçage, on doit donc observer des franges parallèles comme dans la figure au centre.

5- Observation d'anneaux d'interférence

En considérant le graphe général du §2, on constate que l'on observe des franges circulaires sur un écran placé perpendiculairement à l'axe Ox qui porte les deux sources (plan d'équation $x = cte$).

r est la distance entre le point P d'étude et le centre de l'écran.



Notations utilisées, position des sources et disposition de l'écran d'observation

$$r_1 = \sqrt{\left(L - \frac{d}{2}\right)^2 + r^2} = L \sqrt{\left(1 - \frac{d}{2L}\right)^2 + \left(\frac{r}{L}\right)^2} = L \sqrt{1 + \left\{\left(\frac{d}{2L}\right)^2 - 2\frac{d}{2L} + \left(\frac{r}{L}\right)^2\right\}}$$

Un calcul au 1er ordre ne suffira pas, un calcul au 2nd ordre est nécessaire...

Développement limité 2nd ordre $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{\epsilon^2}{8}$ lorsque $\epsilon \ll 1$

Remarque : le calcul détaillé suivant n'est pas exigible en DS :

$$r_1 \approx L \times \left[1 + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d}{2L}\right)^2 - \frac{d}{L} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \right\} - \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{d}{2L}\right)^2 - \frac{d}{L} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \right\}^2 \right] \text{ au 2}^{\text{nd}} \text{ ordre}$$

$$r_1 \approx L \times \left[1 + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d}{2L}\right)^2 - \frac{d}{L} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \right\} - \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{d}{2L}\right)^4 + \left(\frac{-d}{L}\right)^2 + \left(\frac{r}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{d}{2L}\right)^2 \frac{d}{L} + 2\left(\frac{d}{2L}\right)^2 \left(\frac{r}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{L}\right) \left(\frac{r}{L}\right)^2 \right\} \right]$$

$$r_1 \approx L \times \left[1 + \frac{d^2}{8L^2} - \frac{d}{2L} + \frac{r^2}{2L^2} - \frac{d^4}{32L^4} + \frac{d^2}{8L^2} - \frac{r^4}{8L^4} + \frac{d^3}{16L^3} - \frac{d^2 r^2}{16L^4} + \frac{dr^2}{4L^3} \right]$$

$$r_1 \approx L + \frac{d^2}{8L} - \frac{d}{2} + \frac{r^2}{2L} - \frac{d^4}{32L^3} + \frac{d^2}{8L} - \frac{r^4}{8L^3} + \frac{d^3}{16L^2} - \frac{d^2 r^2}{16L^3} + \frac{dr^2}{4L^2}$$

De même (avec $d \rightarrow -d$) on a

$$r_2 \approx L + \frac{d^2}{8L} + \frac{d}{2} + \frac{r^2}{2L} - \frac{d^4}{32L^3} + \frac{d^2}{8L} - \frac{r^4}{8L^3} - \frac{d^3}{16L^2} - \frac{d^2 r^2}{16L^3} - \frac{dr^2}{4L^2}$$

De très nombreux termes s'éliminent dans la différence :

$$\delta = n(r_2 - r_1) \approx n \times \left(d - \frac{dr^2}{2L^2} - \frac{d^3}{8L^2} \right) \approx n \times \left(d - \frac{dr^2}{2L^2} \right) \quad \text{après avoir éliminé les termes en } d^3 \text{ et } + \text{ (calcul au } 2^{\text{nd}} \text{ ordre limité en terme au carré)}$$

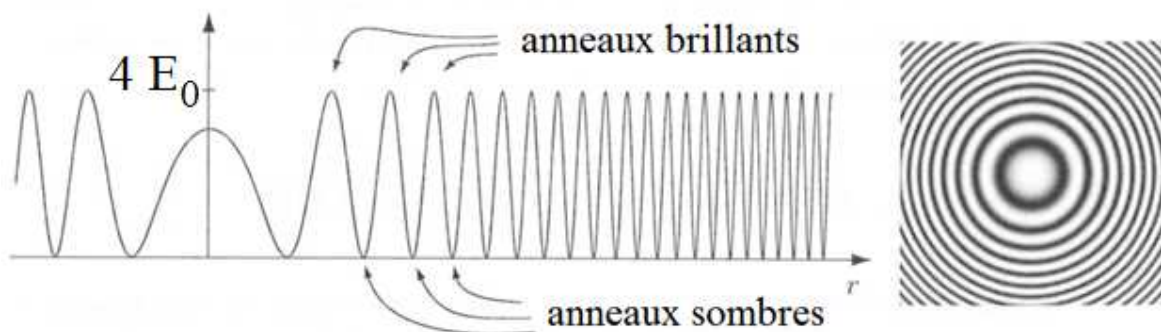
On constate a posteriori que le calcul au premier ordre, en négligeant tout les termes en r^2 , aurait donné le résultat absurde $\delta \approx n \times d$ faussement indépendant de r ! Le calcul précédent au 2^{nd} ordre est bien nécessaire.

Résultat du calcul :

$$\text{Soit finalement } \delta = n(r_2 - r_1) \approx n \times \left(d - \frac{dr^2}{2L^2} \right) \quad \text{donc}$$

$$E_{s \text{ anneaux}}(r) = 2 E_0 \left\{ 1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \delta \right) \right\}$$

$$E_{s \text{ anneaux}}(r) = 2 E_0 \left\{ 1 + \cos \left(\frac{2\pi n d}{\lambda_0} \times \left(1 - r^2/2L^2 \right) \right) \right\}$$



Distribution de l'éclairement reçu sur l'écran et figure des franges d'interférence

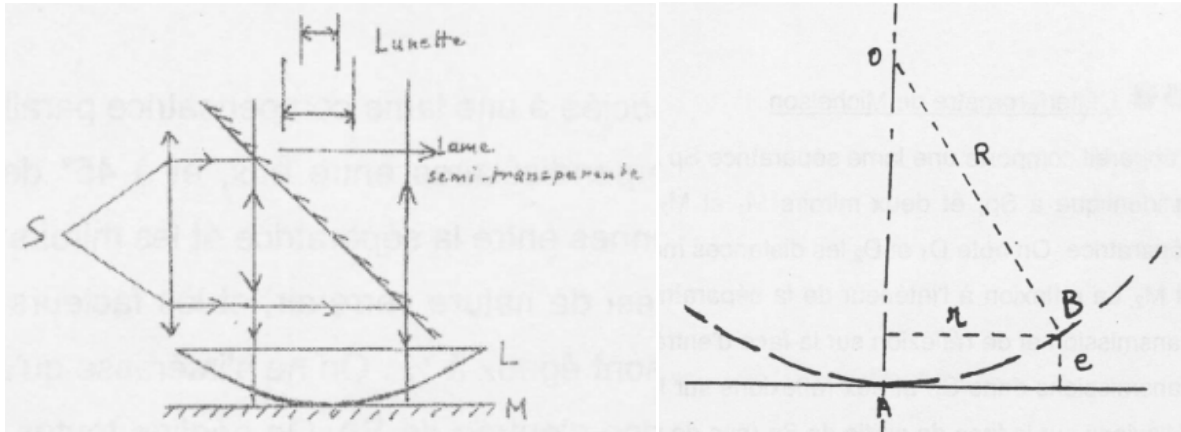
Remarque : Le p -ième anneau brillant correspond à

$$\frac{2\pi n d}{\lambda_0} \times \left(1 - r^2/2L^2 \right) = 2\pi \times p \quad \text{pour } p \in \mathbb{Z} \quad \text{avec } r \geq 0$$

6- Mesure de rayon de courbure avec un interféromètre de Newton

Un dispositif optique est constitué d'une lentille plan-convexe de rayon de courbure R et d'un dioptre plan ; il est éclairé avec des lumières parallèles issues d'une source au sodium considérée comme monochromatique $\lambda = 0,589 \mu\text{m}$.

Les figures ci-dessous décrivent la situation rencontrée en TP :



Le système est étudié en réflexion. On observe à travers la lunette des franges d'interférence **localisées sur la surface inférieure de la lentille** limitant la lame d'air mince définie par les deux dioptres. L'épaisseur d'air e sera toujours très faible.

Q6.1- Montrer que $r^2 \approx 2 R e$

Q6.2- Exprimer la différence de marche δ entre deux vibrations qui interfèrent au niveau de B. En déduire que les franges sont des anneaux.

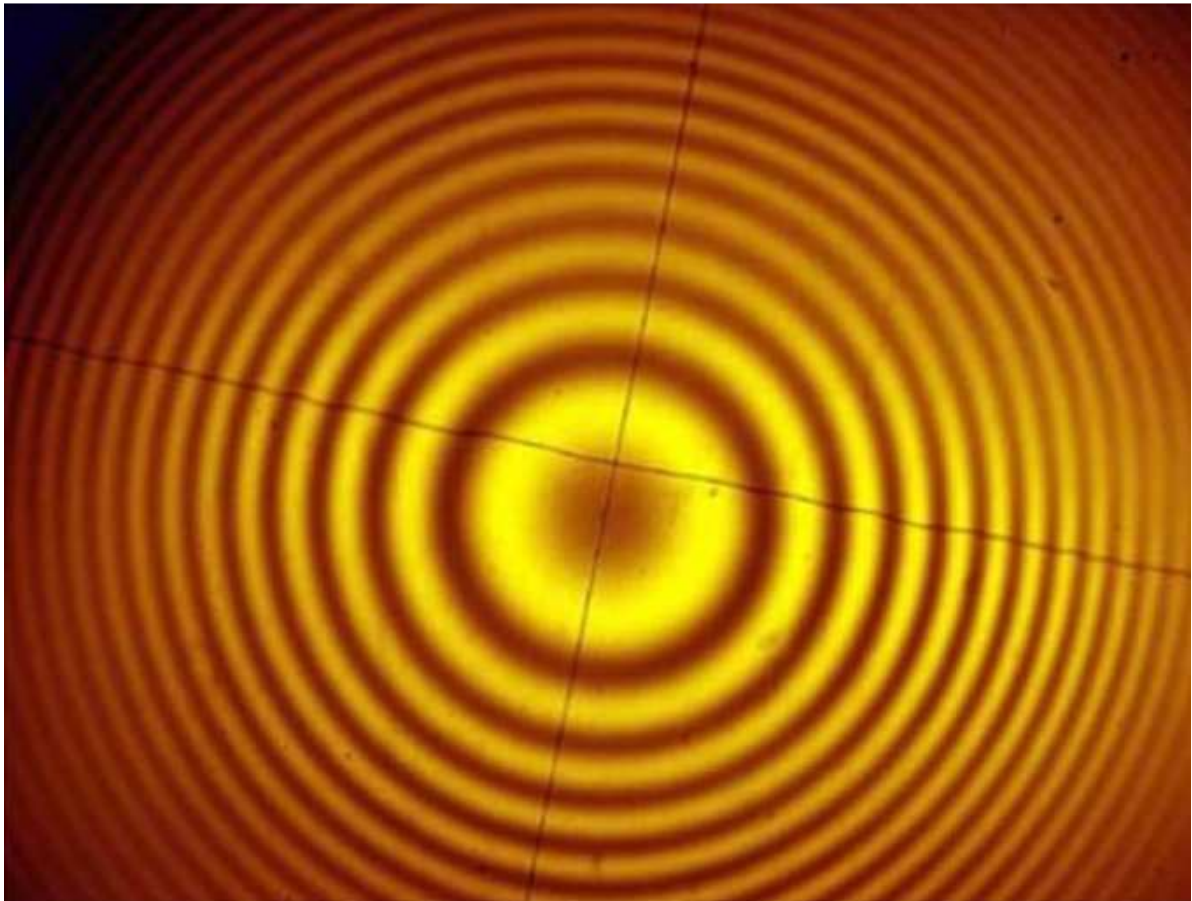
Bien noter qu'il s'agit ici de **franges d'égale épaisseur**, correspondant à un coin d'air d'épaisseur e variable mais à symétrie de révolution.

Q6.3- Montrer que le rayon r_p d'un anneau sombre est donné par la relation : $r_p = \sqrt{\lambda R} \times \sqrt{p}$ où p est l'ordre des anneaux. Quelle valeur de p sont physiquement possible ?

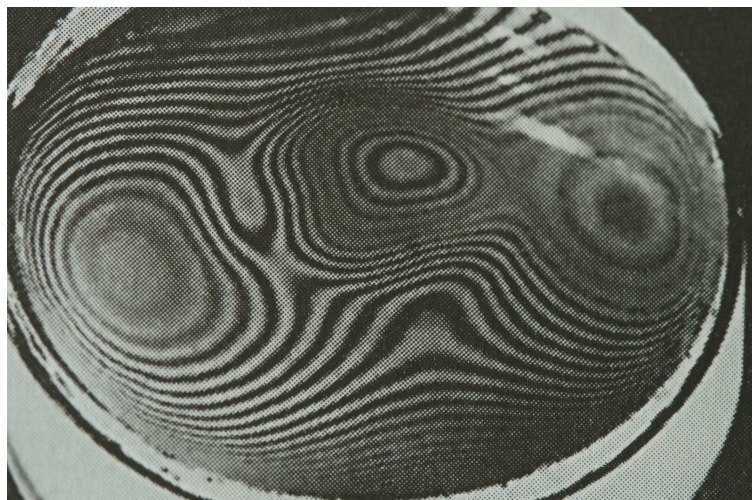
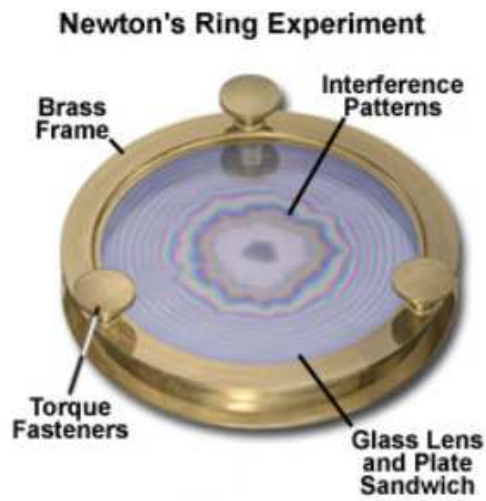
Q6.4- Montrer que le centre de la figure observée est sombre.

Q6.5- Le diamètre du 20ème anneau sombre vaut 9,65 mm. En déduire R , le rayon de courbure de la lentille.

Q6.6- Comment apparait un défaut de sphéricité ?

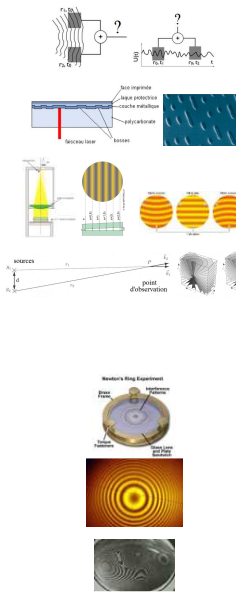


Situation typique d'observation de TP pour une faible courbure



Observation d'une lentille en verre de mauvaise qualité (avec des inclusions)

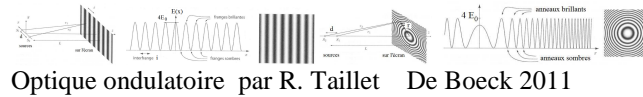
Sources des illustrations et des simulations



<http://wiki.epfl.ch/houdre/documents/OptII%202011-2012/OptII.2%202012.pdf>

<http://www.louis-armand-mulhouse.eu/btsse/acrobat-cours/optiq.pdf>

<http://serge.bertorello.free.fr/plan/plan.html>



Optique ondulatoire par R. Taillet De Boeck 2011

<http://www.microscopyu.com/articles/polarized/interferenceintro.html>

http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M09_G01/co/Contenu_042.html

<http://jpr625252.blogspot.fr/p/ondeoptique-physique.html>

INTERFERENCES A 2 ONDES 1

1- Superpositions de deux ondes monochromatiques : conditions d'interférence..... 1

2- Figures d'interférence pour deux sources ponctuelles..... 3

3- Observation de franges d'interférence 5

4- Contrôle de la planéité d'un miroir avec un interféromètre de Fizeau. 6

5- Observation d'anneaux d'interférence..... 8

6- Mesure de rayon de courbure avec un interféromètre de Newton 10

Sources des illustrations et des simulations..... 12