

C2 - Caractérisation des images

Etude de dioptrés plan et sphérique

Applications aux miroirs et aux lentilles minces

1- Dioptré

Dioptré : interface séparant deux milieux **transparents** (d'indices de réfraction a priori **différents**)

En traversant un dioptré, la lumière réfracte et la direction d'un rayon lumineux change selon la **loi des sinus** $n \sin i = n' \sin i'$.



réflexion partielle (vitre : dioptré plan)

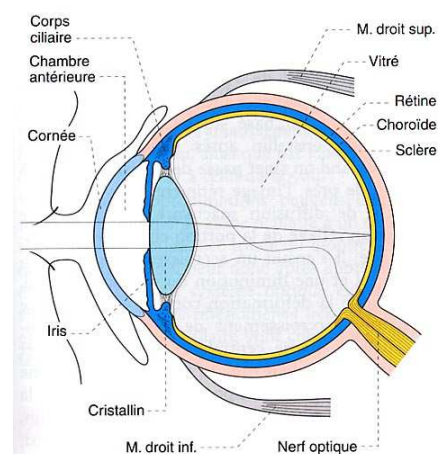


effet de « brisure » visuelle sur le dioptré air/eau



Réflexion partielle sur un dioptré sphérique (la face extérieure de la cornée) et transmission partielle de la lumière réfractée qui éclaire la rétine.

Cristallin : épaisseur 4 mm, rayon face avant 10.20 mm, face arrière – 6 mm, indice 1.42



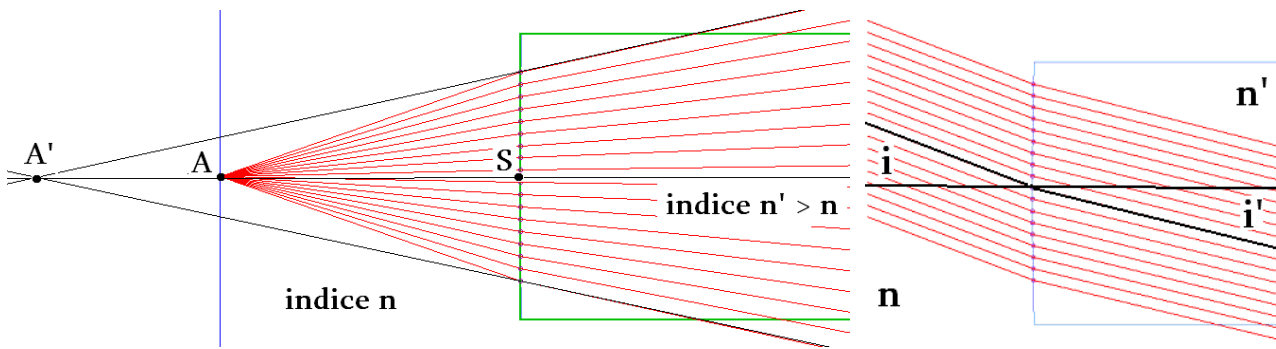
Donnée pour un œil humain :

Cornée : épaisseur 0.55 mm, rayon face avant 7.80 mm, face arrière 6.50 mm, indice 1.3771

Chambre intérieure : épaisseur 3.05 mm, indice 1.3374

Corps vitré : indice 1.336

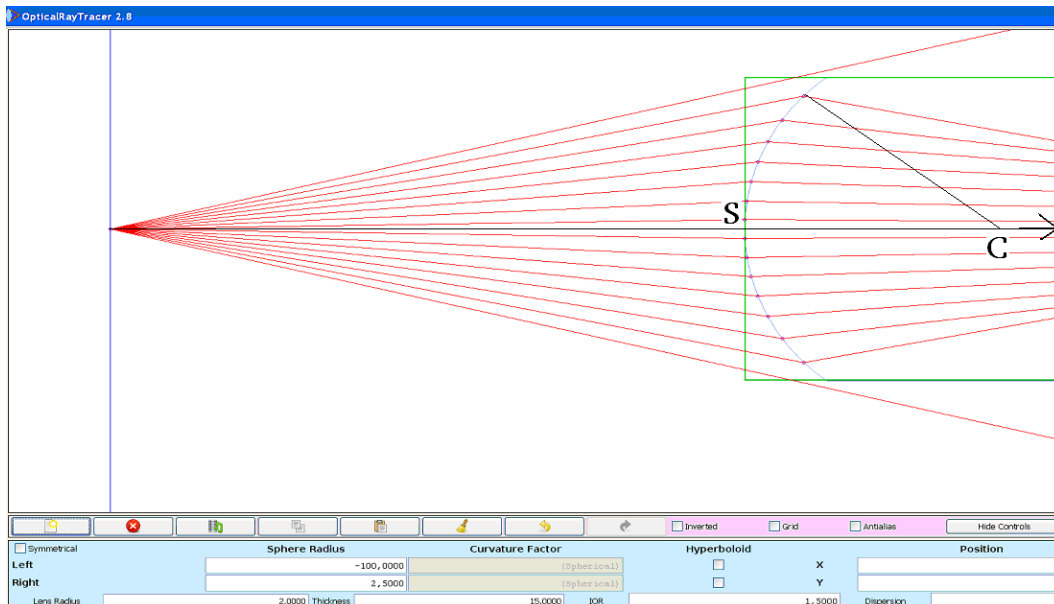
2- Rôle de la réfraction pour un dioptré plan



3- Rôle de la réfraction pour un dioptré sphérique

Simulation d'un exemple de dioptré **convexe** de rayon de courbure $R = \overline{SC} > 0$

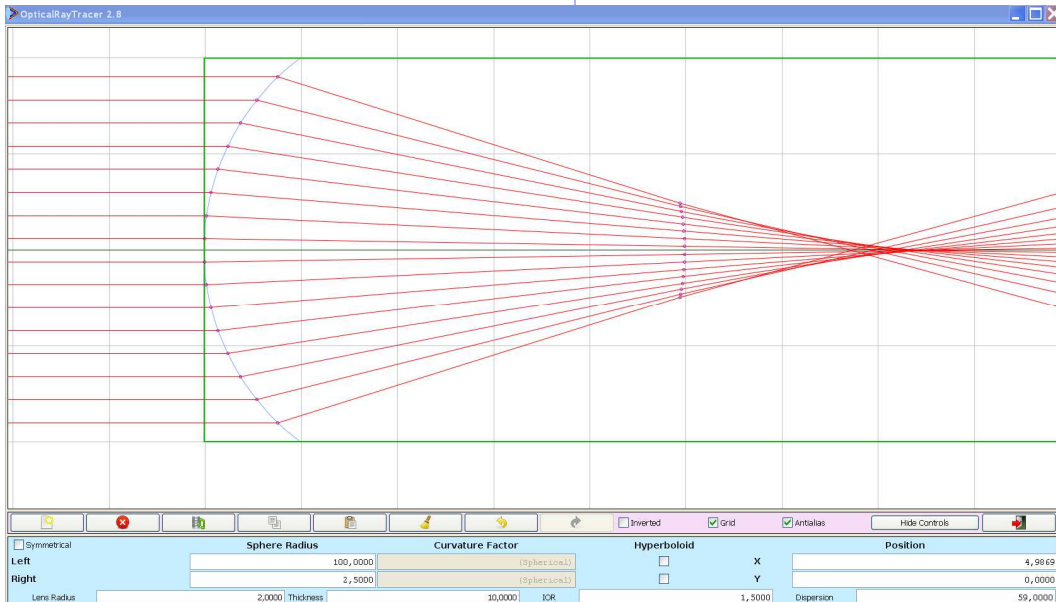
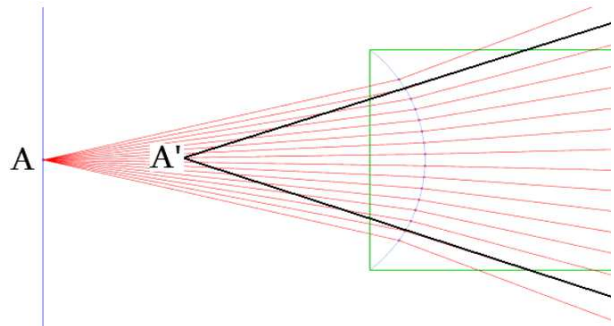
(S **sommet**, C **centre**, **axe optique** orienté vers la droite) Ici $R = \overline{SC} = +2.5$



La **réfraction** gouverne les changements de direction des rayons :
c'est la **cause** de la **convergence** ou **divergence** du faisceau.

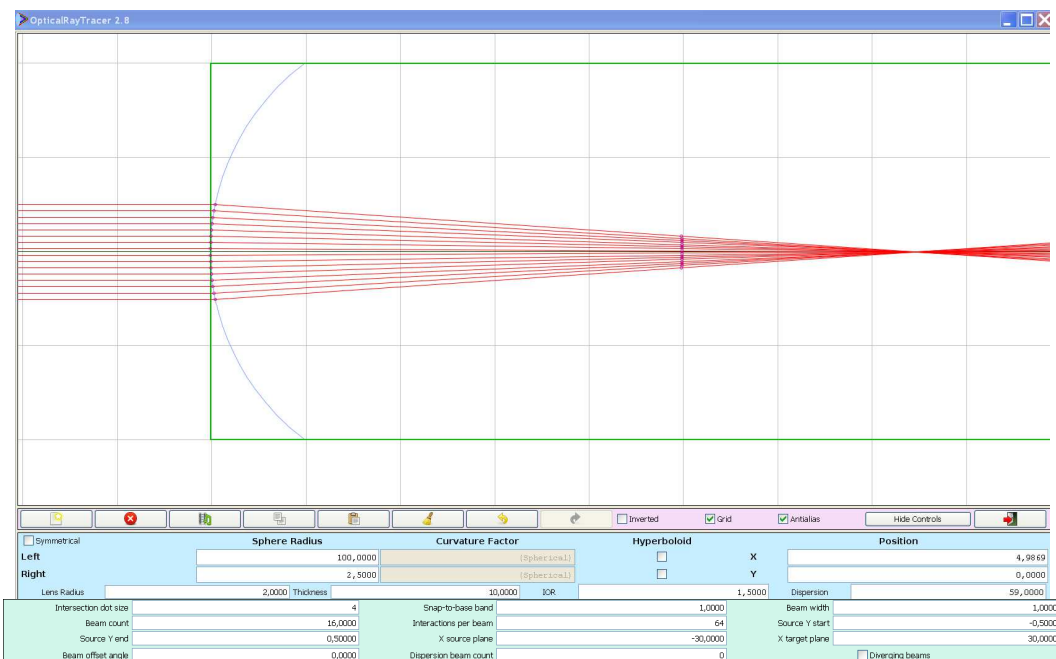
- les rayons incidents **viennent** de A : l'objet A est **réel**.
- les rayons émergent **semblent issus** de A' : l'image A' est **virtuelle**.

- A et A' sont « conjugués »
- A' ≈ image de A
- A ≈ objet de A'



Le point objet A est situé très loin à gauche (à l'infini « objet »)

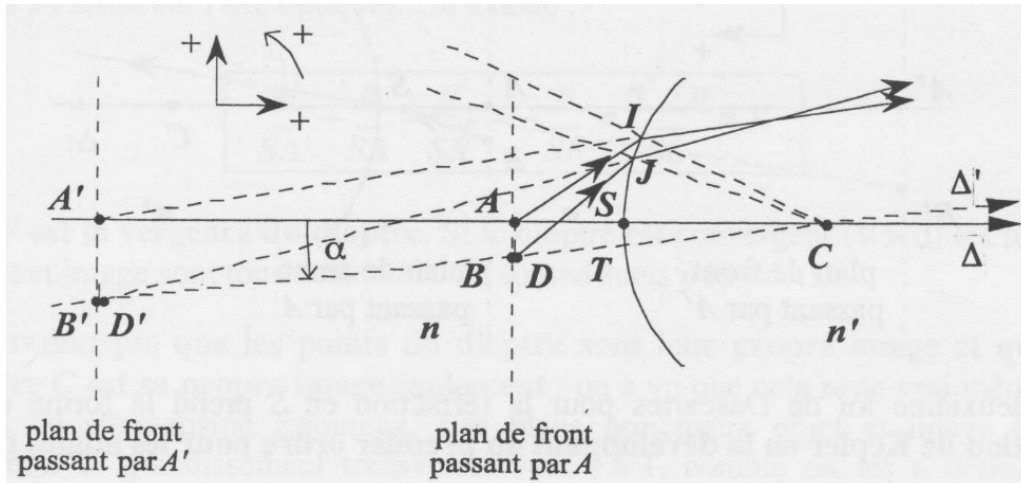
- faisceau large → l'image A' est mal définie (**aberration géométrique** de « coma »)
- pas de **stigmatisme** (« l'image d'un point n'est pas un point »)



- Diamètre du faisceau limité → ≈ convergence au point « foyer image » du dioptre
- **stigmatisme approché** (stigmatisme = « l'image d'un point est un point »)
- A' sera un point **d'autant mieux défini que le faisceau sera moins large.**

Conditions de Gauss : utiliser des rayons proches de l'axe optique et peu inclinés sur l'axe (angle des rayons avec l'axe très petits)
 → **stigmatisme approché.**

4- Aplanétisme approché pour le dioptré sphérique



Soit une rotation de centre C d'angle α pour laquelle le dioptré sphérique est invariant :

A et A' conjugués
 → D et D' conjugués
 Ces deux couples sont approximativement stigmatiques.

Si α très petit alors $B \approx D$ et $B' \approx D'$
 AB et A'B' sont donc dans deux plans de front, perpendiculaire à l'axe optique.

En conditions de Gauss : **stigmatisme approché** → **aplanétisme approché**
 (aplanétisme \approx « l'image d'un plan est un plan »)

5- Dioptrés sphérique convexe (en bosse) et concave (en creux)

Rappel : S sommet, C centre, axe optique orienté vers la droite

→ dioptré **convexe** de rayon de courbure $R = \overline{SC} > 0$ « en bosse » (C après S)

→ dioptré **concave** de rayon de courbure $R = \overline{SC} < 0$ « en creux » (C avant S)

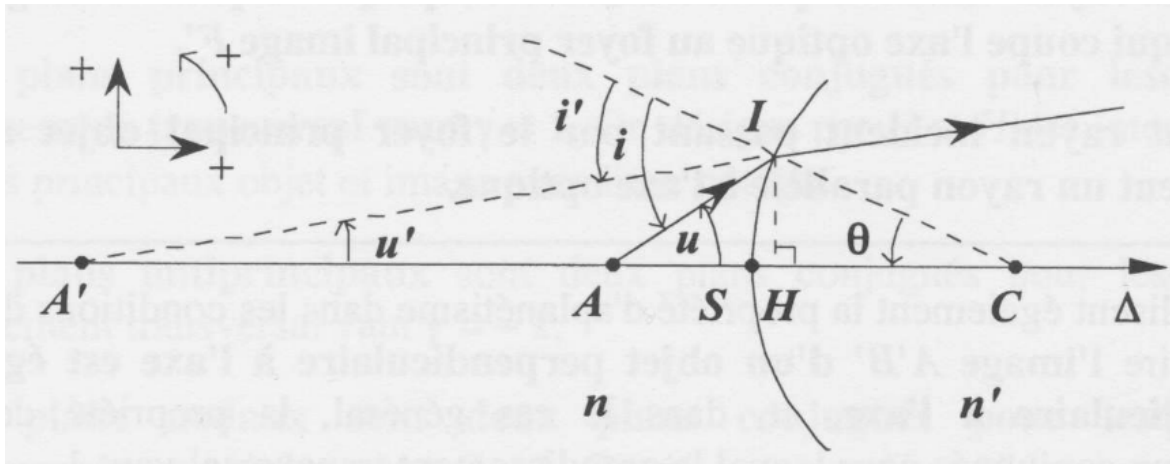


Aquarium boule « convexe »



Immeuble à façade concave !
 « 20 Fenchurch Street » - Londres © AFP

6- Relation de conjugaison en conditions de Gauss d'un dioptré sphérique (reliant les positions « objet » et « image »)



Conventions orientation : axes orienté vers la droite et vers le haut, angle comme en trigonométrie

Conditions de Gauss :

- Les rayons sont proches de l'axe optique et peu inclinés sur cet axe
- tous les angles $\alpha = i, i', u, u'$ et θ sont petits, soit $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$
- u' petit donc H proche de S : $H \approx S$ (dans les formules suivantes)

Rappel :

- la somme des trois angles d'un triangle vaut π .
- Triangle AIC $\pi = u + (\pi - i) + \theta \rightarrow i = u + \theta$ (1)
- Triangle A'IC: $\pi = u' + (\pi - i') + \theta \rightarrow i' = u' + \theta$ (2)

Loi de Descartes pour la réfraction en I : $n \sin i = n' \sin i'$

En exprimant que les angles sont petits, on simplifie en $n \times i \approx n' \times i'$

On remplace avec (1) et (2) d'où $n \times (u + \theta) \approx n' \times (u' + \theta)$ (3)

En exprimant que les angles sont petits et $H \approx S$

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{\overline{HI}}{\overline{HC}} \approx \frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} > 0$$

$$u \approx \tan u = \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} \approx \frac{\overline{SI}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{SI}}{-SA} > 0 \quad \text{et} \quad u' \approx \tan u' = \frac{\overline{HI}}{\overline{A'H}} \approx \frac{\overline{SI}}{\overline{A'S'}} = \frac{\overline{SI}}{-SA'} > 0$$

On remplace θ, u et u' dans la relation de Descartes simplifiée (3)

$$n \times (u + \theta) = n' \times (u' + \theta) \rightarrow n \left(\frac{\overline{SI}}{-SA} + \frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} \right) = n' \left(\frac{\overline{SI}}{-SA'} + \frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} \right)$$

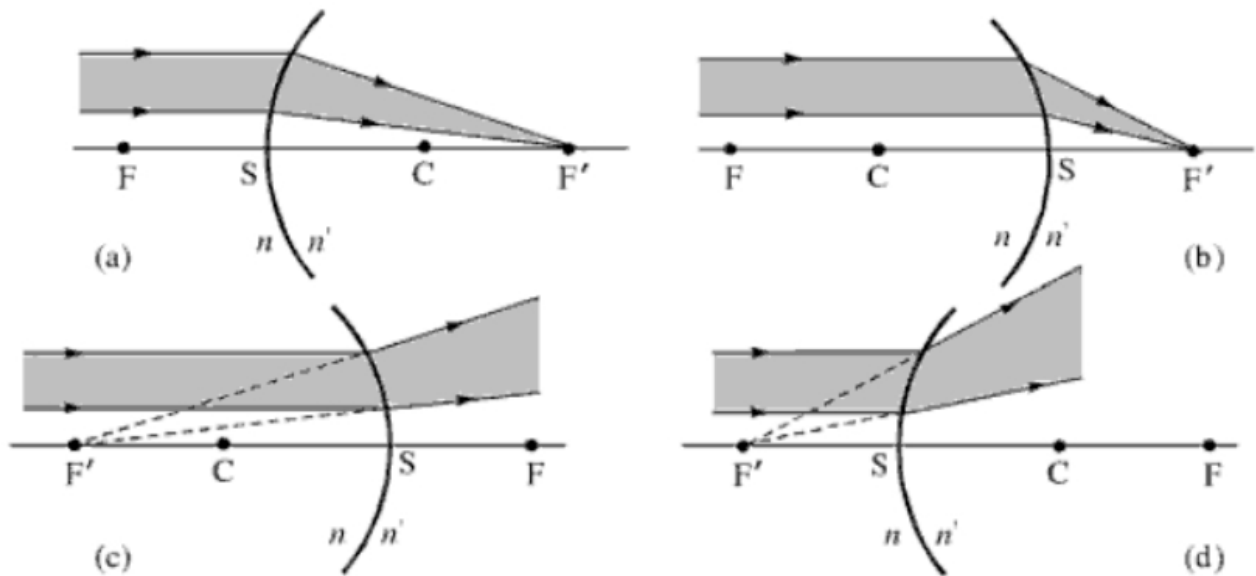
On simplifie le terme commun \overline{SI} après mise en facteur

qui devient finalement la **relation de conjugaison du dioptré sphérique**.

$$\boxed{\frac{n'}{SA'} - \frac{n}{SA} = \frac{n' - n}{SC} = V}$$

V **vergence** mesurée en dioptrie $1\delta = 1 \text{ m}^{-1}$

$V > 0$ **dioptré convergent** et
 $V < 0$ **dioptré divergent**



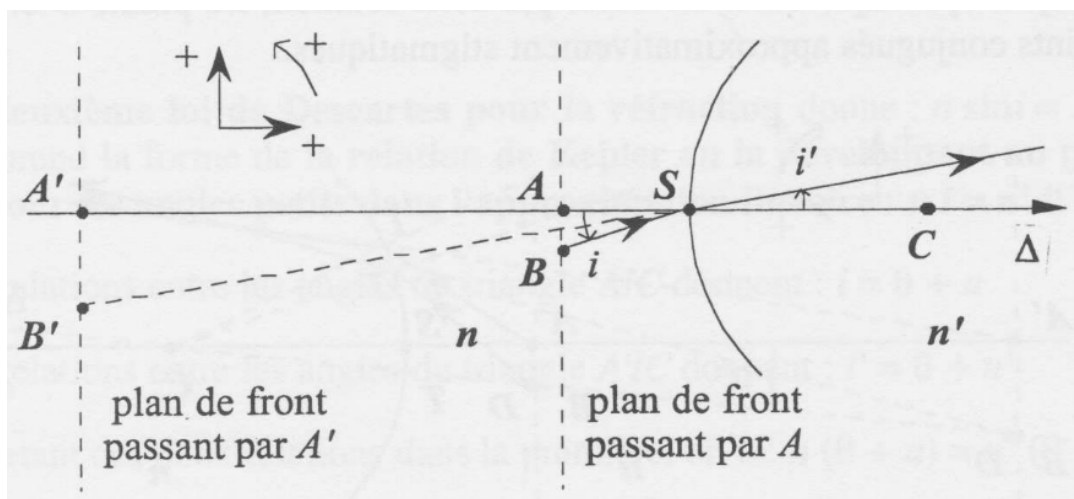
Remarques : il y a quatre dispositions possibles des points S, C, F et F' :
 (a) dioptre convexe convergent si $n' > n$, (b) dioptre concave convergent si $n' < n$,
 (c) dioptre concave divergent si $n' > n$, (d) dioptre convexe divergent si $n' < n$

donc pas d'a priori sur le résultat selon la concavité sans vérifier les indices.

7- Grandissement transversal et angulaire d'un dioptre sphérique

Sur la figure du §5 utilisée en conditions de Gauss, on a montré

$$u \approx \tan u = \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} \approx \frac{\overline{SI}}{\overline{AS}} \quad \text{et} \quad u' \approx \tan u' = \frac{\overline{H'I'}}{\overline{A'H'}} \approx \frac{\overline{S'I'}}{\overline{A'S'}}$$



Sur cette figure utilisée aussi en conditions de Gauss, avec les triangles SAB et SA'B', on constate

$$i \approx \tan i = \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} \quad \text{et} \quad i' \approx \tan i' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SA'}} \quad \text{Soit} \quad \overline{AB} = i \times \overline{SA} \quad \text{et} \quad \overline{A'B'} = i' \times \overline{SA'}$$

La relation de Descartes simplifiée $n i = n' i'$ s'écrit aussi $\frac{i}{i'} = \frac{n'}{n}$

On obtient donc les résultats suivants :

Grandissement angulaire

$$G = \frac{u'}{u} = \frac{\overline{AS}}{\overline{A'S}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}$$

$$\rightarrow \gamma G = \frac{n'}{n}$$

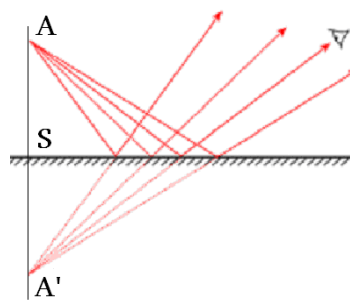
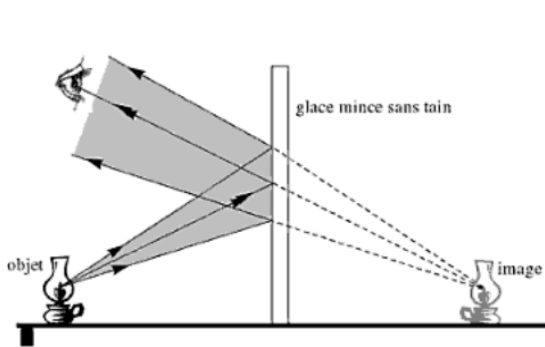
Grandissement transversal

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

→ Invariant (pour tout système centré)

$$n \overline{AB} u = n' \overline{A'B'} u'$$

8- Application aux miroirs plan et sphériques



Repliement du 1/2 espace image sur le 1/2 espace objet

Objet réel A → Image virtuelle A' symétrique par rapport au plan

Tout se passe comme si $n' = -n$

$n \sin i = n' \sin i'$ et $n' = -n$
 → $i = i'$ (loi de Descartes pour la réflexion)

8.1- Miroir sphérique (en conditions de Gauss)

Formule de conjugaison

$$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n' - n}{\overline{SC}} \rightarrow \frac{-n}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{-n - n}{\overline{SC}} \rightarrow -n \times \left(\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} \right) = -n \times \frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} = V = \frac{1}{f'}}$$

où V est la vergence du miroir

Grandissement transversal

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = - \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

Grandissement angulaire

$$G = \frac{u'}{u} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} \quad \text{avec} \quad \gamma G = \frac{n'}{n} = -1$$

8.2- Miroir plan

- Le miroir plan est rigoureusement stigmatique : l'image d'un point est toujours un point.
- A et A' sont symétriques par rapport au plan du miroir
En effet un plan équivaut à une sphère de rayon $R \rightarrow +\infty$ soit $1/R \rightarrow 0$

$$\frac{n'}{SA'} - \frac{n}{SA} = \frac{n'-n}{SC} = \frac{-n}{SA'} - \frac{n}{SA} = \frac{-n-n}{R} \rightarrow 0 \quad \rightarrow \overline{SA'} = -\overline{SA}$$

- $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{-n}{n} \frac{-\overline{SA}}{\overline{SA}} = +1$ et $G = -1$

Objet et image étendue ont même taille et même orientation (le haut reste en haut !).

9- Application aux lentilles minces (en conditions de Gauss)

Les lentilles minces convergentes ou divergentes sont une zone de verre limitée par deux dioptres sphériques. Si on les utilise dans les conditions de Gauss :

- Relations de conjugaison du dioptre 1 et 2 en tenant compte des indices n et n' de la figure
- Image intermédiaire
 $A'_1 \equiv A_2 \equiv A_i$
- Epaisseur négligeable
 $e \ll R \rightarrow$ les sommets sont confondus avec le centre optique $S \equiv S_1 \equiv S_2$

- Premier dioptre rencontré** $n=1$ ($n' = n_v$ avec rayon $R_1 > 0$)

$$\frac{n'}{SA'} - \frac{n}{SA} = \frac{n'-n}{SC} \rightarrow \frac{n_v}{S_1 A_i} - \frac{1}{S_1 A} = \frac{n_v-1}{S_1 C_1} = \frac{n_v-1}{R_1} \rightarrow \frac{n_v}{SA_i} - \frac{1}{SA} = \frac{n_v-1}{SC_1} = \frac{n_v-1}{R_1}$$

$$\text{Grandissement transversal } \gamma_1 = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{AB}} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{SA_i}}{\overline{SA}} = \frac{n_v}{1} \frac{\overline{SA_i}}{\overline{SA}}$$

$$\text{Grandissement angulaire } G_1 = \frac{u_i}{u} = \frac{n'}{n} \frac{1}{\gamma_1} = \frac{n_v}{1} \frac{1}{\gamma_1} \quad \text{ou } G_1 \times \gamma_1 = n_v$$

- Second dioptre rencontré** $n=n_v$ ($n' = 1$ avec rayon $R_2 < 0$)

$$\frac{n'}{SA'} - \frac{n}{SA} = \frac{n'-n}{SC} \rightarrow \frac{1}{S_2 A'} - \frac{n_v}{S_2 A_i} = \frac{1-n_v}{S_2 C_2} = -\frac{n_v-1}{R_2} \rightarrow \frac{1}{SA'} - \frac{n_v}{SA_i} = \frac{1-n_v}{SC_2} = -\frac{n_v-1}{R_2}$$

$$\text{Grandissement transversal } \gamma_2 = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{A_i B_i}} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA_i}} = \frac{1}{n_v} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA_i}}$$

$$\text{Grandissement angulaire } G_2 = \frac{u'}{u_i} = \frac{n'}{n} \frac{1}{\gamma_2} = \frac{1}{n_v} \frac{1}{\gamma_2} \quad \text{ou } G_2 \times \gamma_2 = \frac{1}{n_v}$$

Relation de conjugaison par rapport au sommet.

On somme les deux expressions intermédiaires obtenues (simplification et mise en facteur)

$$\frac{1}{SA'} - \frac{n_V}{SA_i} + \left(\frac{n_V}{SA_i} - \frac{1}{SA} \right) = \frac{n_V - 1}{R_1} - \frac{n_V - 1}{R_2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{SA'} - \frac{1}{SA} = \frac{1}{f'} = V' = (n_V - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

où V' est la « vergence image » et f' la « distance focale image »

Relation de grandissement transversal

On multiplie les deux expressions intermédiaires obtenues (simplification)

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_1 \times \gamma_2 = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_i B_i}} = \frac{1}{n_V} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA_i}} \times \frac{n_V \overline{SA_i}}{1 \overline{SA}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

Relation grandissement angulaire.

On multiplie les deux expressions intermédiaires obtenues (simplification)

$$G = \frac{u'}{u} = G_1 \times G_2 = \frac{u_i}{u} \times \frac{u'}{u_i} = \frac{n_V}{1} \frac{1}{\gamma_1} \times \frac{1}{n_V} \frac{1}{\gamma_2} = \frac{1}{\gamma_1} \times \frac{1}{\gamma_2} = \frac{1}{\gamma} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}$$

ou $G \times \gamma = 1$

Données :

Données sur l'œil : valeurs numériques extraites de *l'opticien-lunetier* C. Kovarski & all Tec & Doc 2009 p 743-744 et http://p.jean2.pagesperso-orange.fr/Cours/rev_sphe/rev_sph.htm

Applet Java OpticalRayTracer sur <http://www.arachnoid.com/OpticalRayTracer/>

Sources des figures et des images :



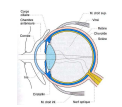
<http://photos.xwing.info/photos/dioptre.jpg>



<http://fr.academic.ru/pictures/frwiki/82/RefractionVerre.jpg>



<http://www.mizzenmast.fr/2008/09/lindcence-du-poisson-rouge/>



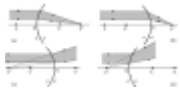
<http://www.clinique-sourdille.com/1-2-10-359/L-oeil-normal.htm>



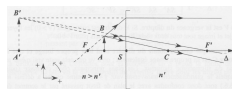
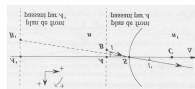
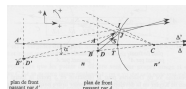
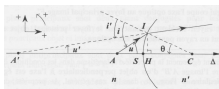
Œil de Yak Bijou Basin's yarns (Colorado) <http://ysolda.com/wordpress/>



Toutes les simulations des tracés de rayons avec OpticalRayTracer disponible sur <http://www.arachnoid.com/OpticalRayTracer/>



Optique géométrique B. Balland PPUR 2007 Recherche sur <http://books.google.fr/> p 177



Optique géométrique C. Grossetête et P. Olive Ellipses 2006

Sommaire

IMAGERIE PAR UN DIOPTRE PLAN OU SPHERIQUE.....	1
1- Dioptré.....	1
2- Rôle de la réfraction pour un dioptré plan	2
3- Rôle de la réfraction pour un dioptré sphérique.....	2
4- Aplanétisme approché pour le dioptré sphérique	4
5- Dioptrés sphérique convexe (en bosse) et concave (en creux)	4
6- Relation de conjugaison en conditions de Gauss d'un dioptré sphérique (reliant les positions « objet » et « image »)	5
7- Grandissement transversal et angulaire d'un dioptré sphérique	6
8- Application aux miroirs plan et sphériques	7
9- Application aux lentilles minces	8
Données :	10
Sources des figures et des images :	10