# Informatique d'Instrumentation
# exercices sur la logique combinatoire

● ***Exercice 1:*** *En complétant le tableau de la figure 1, vérifier l'associativité de l'opération ET. En déduire deux réalisations possibles d'une fonction ET à trois entrées à l'aide de fonctions ET à deux entrées.*

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \cdot y$ | $(x \cdot y) \cdot z$ | $y \cdot z$ | $x \cdot (y \cdot z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

Figure 1: Tableau utilisé dans l'exercice 1.

● ***Exercice 2:*** *Montrer que pour obtenir la négation d'une variable logique $x$, on peut notamment*[1]

- *utiliser un opérateur* NON ET *à deux entrées, envoyer $x$ sur une entrée et appliquer sur l'autre un niveau logique $1$ ;*
- *utiliser un opérateur* NON ET *à deux entrées et envoyer $x$ sur les deux entrées ;*
- *utiliser un opérateur* NON OU *à deux entrées, envoyer $x$ sur une entrée et appliquer sur l'autre un niveau logique $0$ ;*
- *utiliser un opérateur* NON OU *à deux entrées et envoyer $x$ sur les deux entrées ;*
- *utiliser un opérateur* OU EXCLUSIF *à deux entrées et envoyer $x$ sur une entrée et appliquer sur l'autre un niveau logique $1$.*
- *utiliser un opérateur* NON OU EXCLUSIF *à deux entrées et envoyer $x$ sur une entrée et appliquer sur l'autre un niveau logique $0$.*

● ***Exercice 3:*** *Concevoir un premier circuit qui convertit un code binaire à 3 bits en un code Gray de même longueur, puis un autre qui fait l'inverse.*

● ***Exercice 4:*** *À partir des variables logiques $e_1$ et $e_2$, on construit d'abord $s = e_1 \oplus e_2$, puis $s \oplus e_1$, $s \oplus \overline{e_1}$, $s \oplus e_2$ et $s \oplus \overline{e_2}$.*

1. *À l'aide du tableau de la figure 2, simplifier les expressions des quatre dernières expressions logiques.*

| $e_1$ | $e_2$ | $s$ | $s \oplus e_1$ | $s \oplus \overline{e_1}$ | $s \oplus e_2$ | $s \oplus \overline{e_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |

Figure 2: tableau utilisé dans l'exercice 4.

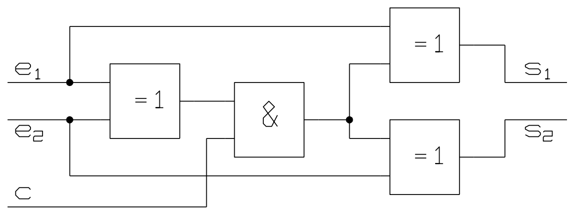


Figure 3: circuit étudié dans l'exercice 4.

2. *Retrouver ensuite ces résultats par des calculs algébriques.*
3. *En déduire les expressions des variables logiques $s_1$ et $s_2$ du circuit de la figure 3.*

● ***Exercice 5:*** *Rappeler tout d'abord les théorèmes de De Morgan. Vérifier ensuite que le circuit de la figure 4 est équivalent à un opérateur OU EXCLUSIF. Quelle information indique la sortie $s$ du circuit de la figure 5 ? Quelles informations indiquent les sorties $g$ et $l$ ?*

● ***Exercice 6:*** *En complétant les tableaux ci-dessous, démontrer l'équivalence des deux formes canoniques de l'opération OU EXCLUSIF.*

| $e_1$ | $e_2$ | $\overline{e_1}$ | $\overline{e_2}$ | $\overline{e_1} \cdot e_2$ | $e_1 \cdot \overline{e_2}$ | $\overline{e_1} \cdot e_2 + e_1 \cdot \overline{e_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |

| $e_1$ | $e_2$ | $\overline{e_1}$ | $\overline{e_2}$ | $e_1 + e_2$ | $\overline{e_1} + \overline{e_2}$ | $(e_1 + e_2) \cdot (\overline{e_1} + \overline{e_2})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |

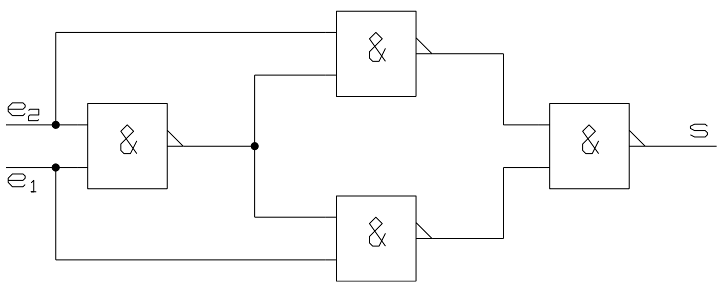


Figure 4: Réalisation d'une fonction OU EXCLUSIF à l'aide de circuits NON ET à deux entrées (voir exercice 5).

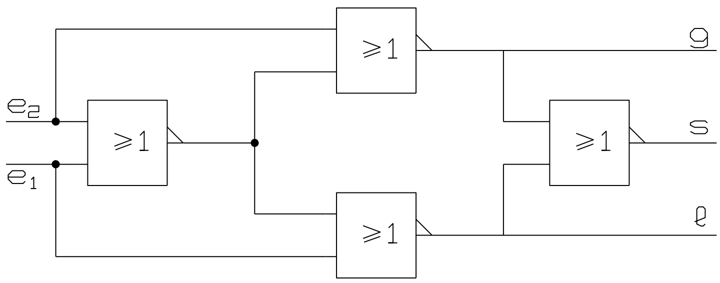


Figure 5: Circuit obtenu en remplaçant dans la figure 4 les circuits NON ET par des circuits NON OU (voir exercice 5).

| $e_3$ | $e_2$ | $e_1$ | $r$ | $s$ | $\overline{r}$ | $\overline{s}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |

Figure 6: Exemples de fonctions logiques.

*Donner ensuite les deux formes canoniques des fonctions* $s = f_1(e_1, e_2, e_3)$ *et* $r = f_2(e_1, e_2, e_3)$ *définies dans la figure 6 page 3.*

● ***Exercice 7:*** *À partir des cinq chiffres binaires* $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ *rangés dans cet ordre, on peut représenter un nombre entier compris entre* $0$ *et* $31$. *Soit* $f$ *la fonction logique qui est égale à* $1$ *lorsque les cinq bits* $a\,b\,c\,d\,e$ *forment les nombres* $10, 11, 21, 23, 26, 27, 29, 31$. *À l'aide d'un tableau de Karnaugh, donner une expression simplifiée de cette fonction.*

● ***Exercice 8:*** *Une association*[2] *est constituée de quatre membres : un président, vous même et deux autres membres. Ayant à prendre une décision importante (la marque de la boisson qui sera servie lors du pot de fin d'année), vous décidez de faire un vote à bulletin secret pour répondre par oui ou par non à une question posée. Comme vous êtes quatre, vous décidez d'accorder au président une double voix. C'est donc comme si il y avait* $5$ *votants, et si il y a au moins* $3$ *voix pour le oui, c'est cette réponse qui l'emportera. Vous proposez alors de réaliser une machine à voter, chaque membre choisissant entre oui et non à l'aide d'un interrupteur. À la fin du vote, une source lumineuse s'allumera si il y a une majorité de oui.*

*Cette proposition étant adoptée, il ne vous reste plus qu'à faire un tableau de vérité de cette fonction, puis un tableau de Karnaugh afin de trouver une expression logique simplifiée de la variable logique* $s$ *qui commandera la source lumineuse. On appellera A le président, B, C, D les trois autres membres et* $e_a$, $e_b$, $e_c$, $e_d$ *les niveaux logiques fournis par les interrupteurs des quatre membres, qui valent* $1$ *si le membre vote oui et* $0$ *si il vote non. Vous pourrez pour cela utiliser les tableaux de la figure 7.*

● ***Exercice 9:*** *On souhaite commander les feux de circulation d'un carrefour routier à l'intersection de deux voies de circulation bidirectionnelles, appelées nord-sud et est-ouest (voir figure 8). On supposera que les feux qui commandent la circulation dans les deux sens d'une voie sont identiques.*

| $e_a$ | $e_b$ | $e_c$ | $e_d$ | nombre de oui | s |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

| | $e_c e_d$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e_a e_b$ | 00 | | | |
| 00 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Figure 7: Tableau de vérité et tableau de Karnaugh de la fonction étudiée dans l'exercice 8. Le nombre de oui doit tenir compte du fait que la *voix du président compte double*.

*Pour faire cela, on utilisera un compteur cyclique modulo* $16$ *dont la sortie* $E = (e_3\, e_2\, e_1\, e_0)_2$ *va de* $0$ *à* $15$ *en progressant d'une unité toutes les* $10$ *s. La séquence d'allumage des feux est indiquée sur la figure* 9 *: au début d'un cycle, l'axe nord-sud passe au vert (pour* $E$ *allant de* $1$ *à* $5$*), puis à l'orange (pour* $E = 6$ *ou* $7$*), puis au rouge. L'axe est-ouest passe alors au vert (pour* $E$ *allant de* $9$ *à* $13$*), puis à l'orange (pour* $E = 14$ *ou* $15$*), puis au rouge. Lorsque ce cycle est terminé, un nouveau cycle identique commence.*

*On notera* $R_x$, $O_x$ *et* $V_x$ *les variables logiques de commande des feux rouge, orange et vert sur la voie* $x$ *(avec* $x = \mathrm{eo}$ *ou* $x = \mathrm{ns}$*). Un niveau logique* $1$ *correspond à un feu allumé, un niveau* $0$ *à un feu éteint.*

1. *Compléter sur la figure* 9 *le tableau de vérité des variables logiques* $R_{\mathrm{eo}}$, $O_{\mathrm{eo}}$, $V_{\mathrm{eo}}$, $R_{\mathrm{ns}}$, $O_{\mathrm{ns}}$ *et* $V_{\mathrm{ns}}$*. Quelle est la durée des feux rouge, orange et vert sur une voie ?*
2. *Après avoir complété les tableaux de Karnaugh de la figure* 10*, donner des expressions logiques simplifiées de ces six variables.*

● ***Exercice 10:*** Calculer à la main *l'addition de deux nombres binaires à* $6$ *bits,*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & {\scriptstyle r_4} & {\scriptstyle r_3} & {\scriptstyle r_2} & {\scriptstyle r_1} & {\scriptstyle r_0} & \\
 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
r_5 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0
\end{array}$$

*nécessite de calculer successivement les chiffres binaires* $s_0$, $r_0$, $s_1$, $r_1 \ldots s_5$, $r_5$*. Mais ces quantités peuvent aussi être déterminées par des circuits de l'électronique numérique, avec lesquels il est donc possible d'effectuer des additions.*

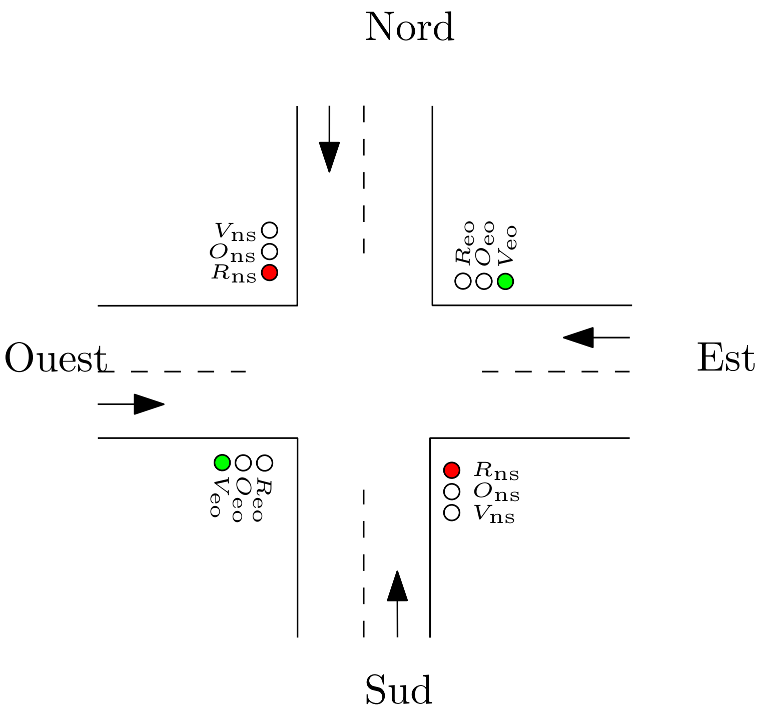


Figure 8: Feux de circulation d'un carrefour étudiés dans l'exercice 9, représentés ici pour une valeur de $E$ comprise entre 9 et 13.

| $E$ | $e_3$ | $e_2$ | $e_1$ | $e_0$ | feux est-ouest | feux nord-sud | $R_{eo}$ | $O_{eo}$ | $V_{eo}$ | $R_{ns}$ | $O_{ns}$ | $V_{ns}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | rouge | rouge | | | | | | |
| 1 | | | | | rouge | vert | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | | | | | rouge | vert | | | | | | |
| 3 | | | | | rouge | vert | | | | | | |
| 4 | | | | | rouge | vert | | | | | | |
| 5 | | | | | rouge | vert | | | | | | |
| 6 | | | | | rouge | orange | | | | | | |
| 7 | | | | | rouge | orange | | | | | | |
| 8 | | | | | rouge | rouge | | | | | | |
| 9 | | | | | vert | rouge | | | | | | |
| 10 | | | | | vert | rouge | | | | | | |
| 11 | | | | | vert | rouge | | | | | | |
| 12 | | | | | vert | rouge | | | | | | |
| 13 | | | | | vert | rouge | | | | | | |
| 14 | | | | | orange | rouge | | | | | | |
| 15 | | | | | orange | rouge | | | | | | |

Figure 9: Tableau utilisé dans l'exercice 9.

1. *À partir des deux bits de poids faible,* $a_0$ *et* $b_0$*, on peut déterminer la somme* $s_0$ *et la retenue* $r_0$*. Compléter le tableau de vérité de la figure 11. En déduire les expressions logiques de* $r_0$ *et* $s_0$*, et faire le schéma du circuit (appelé demi-additionneur) qui à partir de* $a_0$ *et* $b_0$*, détermine* $r_0$ *et* $s_0$*. Combien faut-il de portes NON ET à deux entrées pour réaliser ce circuit ?*
2. *À partir des trois bits* $a_1$*,* $b_1$ *et* $r_0$*, on détermine ensuite* $s_1$ *et* $r_1$*. Compléter le tableau de vérité*

| $R_{\text{eo}}$ | $e_1\, e_0$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e_3\, e_2$ | 00 | | | |
| 00 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| $O_{\text{eo}}$ | $e_1\, e_0$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e_3\, e_2$ | 00 | | | |
| 00 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| $V_{\text{eo}}$ | $e_1\, e_0$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e_3\, e_2$ | 00 | | | |
| 00 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| $R_{\text{ns}}$ | $e_1\, e_0$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e_3\, e_2$ | 00 | | | |
| 00 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| $O_{\text{ns}}$ | $e_1\, e_0$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e_3\, e_2$ | 00 | | | |
| 00 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| $V_{\text{ns}}$ | $e_1\, e_0$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e_3\, e_2$ | 00 | | | |
| 00 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Figure 10: Tableaux de Karnaugh utilisés dans l'exercice 9. On pourra n'indiquer que les cas où les fonctions valent $1$.

| $a_0$ | $b_0$ | $r_0$ | $s_0$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | |
| 0 | 1 | | |
| 1 | 0 | | |
| 1 | 1 | | |

Figure 11: Tableau de vérité d'un circuit demi-additionneur.

*de la figure 12. Écrire la somme canonique de $s_1$, et en déduire une expression simplifiée. À l'aide d'un tableau de Karnaugh, trouver une expression simplifiée de $r_1$. En comparant ensuite $r_1$ à $a_1 \cdot b_1$ et $a_1 \oplus b_1$, montrer que $r_1$ et $s_1$ peuvent être obtenus à l'aide de deux circuits demi-additionneurs et d'une fonction OU.*

3. *En déduire le circuit d'un additionneur $6$ bits, et examiner le circuit de l'annexe technique.*

● ***Exercice 11:*** *On souhaite réaliser la multiplication de deux nombres $A$ et $B$ codés en binaire naturel sur deux bits. On notera $a_0$ et $a_1$ les bits de poids faible et de poids fort du nombre $A$, et $b_0$ et $b_1$ ceux de $B$. Le résultat $P = A \times B$ de cette multiplication est également codé en binaire naturel.*

1. *Montrer que quatre bits suffisent pour coder $P$.*

| $r_0$ | $a_1$ | $b_1$ | $r_1$ | $s_1$ | $a_1 \cdot b_1$ | $a_1 \oplus b_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |

Figure 12: Tableau de vérité d'un circuit additionneur complet.

| $A$ | $a_1$ | $a_0$ | $B$ | $b_1$ | $b_0$ | $P$ | $p_3$ | $p_2$ | $p_1$ | $p_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | | 0 | 0 | | | | | |
| | 0 | 0 | | 0 | 1 | | | | | |
| | 0 | 0 | | 1 | 0 | | | | | |
| | 0 | 0 | | 1 | 1 | | | | | |
| | 0 | 1 | | 0 | 0 | | | | | |
| | 0 | 1 | | 0 | 1 | | | | | |
| | 0 | 1 | | 1 | 0 | | | | | |
| | 0 | 1 | | 1 | 1 | | | | | |
| | 1 | 0 | | 0 | 0 | | | | | |
| | 1 | 0 | | 0 | 1 | | | | | |
| | 1 | 0 | | 1 | 0 | | | | | |
| | 1 | 0 | | 1 | 1 | | | | | |
| | 1 | 1 | | 0 | 0 | | | | | |
| | 1 | 1 | | 0 | 1 | | | | | |
| | 1 | 1 | | 1 | 0 | | | | | |
| | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | | | |

Figure 13: Tableau de vérité du circuit réalisant la multiplication de deux nombres à deux chiffres binaires étudié dans l'exercice 11.

2. *Compléter la table de vérité de la figure 13.*
3. *À l'aide des tableaux de Karnaugh, en déduire des expressions simplifiées des fonctions* $p_3$, $p_2$, $p_1$ et $p_0$.
4. *Réaliser ensuite ces fonctions à l'aide de fonctions* NON-ET *à deux entrées.*

● ***Exercice 12:*** *Les codeurs de position absolue tels que les roues à code Gray nécessitent un nombre important de pistes pour fournir une bonne précision. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une autre façon de réaliser des codeurs de position absolue qui ne nécessitent qu'*une *seule piste*[3].

1. ***Réalisation du codeur de position***
   *Pour réaliser un capteur de position, on peut construire une piste constituée de rectangles noirs (niveaux 0) et de rectangles translucides (niveaux 1). La succession des niveaux hauts et bas d'une piste de ce type est donnée par la relation* $p_n = p_{n-1} \oplus p_{n-4}$, *et initialisée par* $p_0 = p_1 = p_2 = 0$ et $p_3 = 1$.
   - *Rappeler le tableau de vérité de l'opérateur* $\oplus$.
   - *Compléter la piste ci-dessous. Quelle est la période de la séquence obtenue ?*

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_n$ | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |

2. ***Réalisation du décodeur***
   *Sur un capteur du même type, pour lequel la succession des niveaux hauts et bas est régie par l'équation* $p_n = p_{n-2} \oplus p_{n-3}$, *initialisée par* $p_0 = p_1 = 0$ et $p_2 = 1$, *la piste obtenue est la suivante :*

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_n$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

   *Pour mesurer la position* $n$ *à l'aide de ce capteur, on vient lire* 3 *bits successifs* $p_n$, $p_{n+1}$ et $p_{n+2}$ *à l'aide de composants opto-électroniques.*

| | bits lus sur la piste | | | codage de $n$ en binaire | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $p_n$ | $p_{n+1}$ | $p_{n+2}$ | $b_2$ | $b_1$ | $b_0$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | | | 0 | 1 | 0 |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | | | | | | |
| 11 | | | | | | |

Figure 14: tableau de vérité du codeur de position étudié dans l'exercice 12.

- *Compléter le tableau de la figure 14.*
- *Combien y a t-il de triplets* $(p_n, p_{n+1}, p_{n+2})$ *différents ? Combien peut-on donc distinguer de positions différentes avec ce capteur ? Si la piste a une longueur de* $3.5$ *cm, quelle est la résolution du capteur ?*
- *Pour obtenir l'information de position, on souhaite construire un transcodeur qui, à partir des triplets* $(p_n, p_{n+1}, p_{n+2})$*, fournit la valeur de* $n$ *codée en binaire. Combien faut-il de bits pour coder toutes les valeurs de* $n$ *différentes ? Compléter alors le tableau de la figure 14.*
- *À l'aide de tableaux de Karnaugh, écrire les expressions logiques simplifiées des fonctions qui permettent de calculer les bits* $b_i$ *à partir des bits* $p_j$*.*

# Notes

[1]Source : B. Kainka, L. Gollub, “Électronique logique et numérique, mes premiers pas”, Elektor-Publitronic, 2010.

[2]Source : P. Cabanis, E. Bernier, “Électronique digitale”, Dunod, 1985.

[3]Pour plus de détails sur ces codeurs, voir E.M. Petriu, “Absolute position measurement using pseudo random binary encoding”, IEEE Instrumentation and Measurement Magazine, Vol 1, No 3, pp 19–23.