

● **Exercice 7:** À partir des cinq chiffres binaires a, b, c, d, e rangés dans cet ordre, on peut représenter un nombre entier compris entre 0 et 31. Soit f la fonction logique qui est égale à 1 lorsque les cinq bits $a b c d e$ forment les nombres 10, 11, 21, 23, 26, 27, 29, 31. À l'aide d'un tableau de Karnaugh, donner une expression simplifiée de cette fonction.

Handwritten Karnaugh map for a 4-variable function with variables a, b, c, d . The map is a 4×4 grid with columns labeled cde (000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100) and rows labeled ab (00, 01, 11, 10). The function is defined by the following minterms (circled in the original image):

- m_2 (001)
- m_3 (011)
- m_7 (111)
- m_{11} (101)
- m_{13} (110)
- m_{15} (111)

The map shows several groups of 1s:

- A group of 2s in the $ab=00$ row (minterms 2 and 3).
- A group of 2s in the $ab=01$ row (minterms 5 and 7).
- A group of 2s in the $ab=11$ row (minterms 13 and 15).
- A group of 2s in the $ab=10$ row (minterms 11 and 14).
- A group of 4s in the $cd=11$ column (minterms 7, 11, 15, 14).
- A group of 4s in the $cd=01$ column (minterms 3, 7, 11, 15).

01010	10
01011	11
10101	21
10111	23

11010	26
11011	27
11101	29
11111	31

$$f = b \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot c \cdot e$$

● **Exercice 8:** Une association² est constituée de quatre membres : un président, vous même et deux autres membres. Ayant à prendre une décision importante (la marque de la boisson qui sera servie lors du pot de fin d'année), vous décidez de faire un vote à bulletin secret pour répondre par oui ou par non à une question posée. Comme vous êtes quatre, vous décidez d'accorder au président une double voix. C'est donc comme si il y avait 5 votants, et si il y a au moins 3 voix pour le oui, c'est cette réponse qui l'emportera. Vous proposez alors de réaliser une machine à voter, chaque membre choisissant entre oui et non à l'aide d'un interrupteur. À la fin du vote, une source lumineuse s'allumera si il y a une majorité de oui.

Cette proposition étant adoptée, il ne vous reste plus qu'à faire un tableau de vérité de cette fonction, puis un tableau de Karnaugh afin de trouver une expression logique simplifiée de la variable logique s qui commandera la source lumineuse. On appellera A le président, B, C, D les trois autres membres et e_a, e_b, e_c, e_d les niveaux logiques fournis par les interrupteurs des quatre membres, qui valent 1 si le membre vote oui et 0 si il vote non. Vous pourrez pour cela utiliser les tableaux de la figure 6.

e_a
"compte"
double

e_a	e_b	e_c	e_d	nombre de oui	s
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	2	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	2	0
0	1	1	0	2	0
0	1	1	1	3	1
1	0	0	0	x 2	0
1	0	0	1	x 3	1
1	0	1	0	x 3	1
1	0	1	1	x 4	1
1	1	0	0	x 3	1
1	1	0	1	x 4	1
1	1	1	0	x 4	1
1	1	1	1	x 5	1

	$e_c e_d$			
$e_a e_b$	00	01	11	10
00				
01			1	
11	1	1	1	1
10		1	1	1

Figure 6: Tableau de vérité et tableau de Karnaugh de la fonction étudiée dans l'exercice 8. Le nombre de oui doit tenir compte du fait que la voix du président compte double.

1 $\rightarrow e_a \cdot e_b$

2 $\rightarrow e_a \cdot e_d$

3 $\rightarrow e_a \cdot e_c$

4 $\rightarrow e_b \cdot e_c \cdot e_d$

}

$$s = e_a \cdot e_b + e_a \cdot e_d + e_a \cdot e_c + e_b \cdot e_c \cdot e_d$$

● **Exercice 9:** On souhaite commander les feux de circulation d'un carrefour routier à l'intersection de deux voies de circulation bidirectionnelles, appelées nord-sud et est-ouest (voir figure 7). On supposera que les feux qui commandent la circulation dans les deux sens d'une voie sont identiques.

Pour faire cela, on utilisera un compteur cyclique modulo 16 dont la sortie $E = (e_3 e_2 e_1 e_0)_2$ va de 0 à 15 en progressant d'une unité toutes les 10 s. La séquence d'allumage des feux est indiquée sur la figure 8 : au début d'un cycle, l'axe nord-sud passe au vert (pour E allant de 1 à 5), puis à l'orange (pour $E = 6$ ou 7), puis au rouge. L'axe est-ouest passe alors au vert (pour E allant de 9 à 13), puis à l'orange (pour $E = 14$ ou 15), puis au rouge. Lorsque ce cycle est terminé, un nouveau cycle identique commence.

On notera R_x , O_x et V_x les variables logiques de commande des feux rouge, orange et vert sur la voie x (avec $x = eo$ ou $x = ns$). Un niveau logique 1 correspond à un feu allumé, un niveau 0 à un feu éteint.

1. Compléter sur la figure 8 le tableau de vérité des variables logiques R_{eo} , O_{eo} , V_{eo} , R_{ns} , O_{ns} et V_{ns} . Quelle est la durée des feux rouge, orange et vert sur une voie ?
2. Après avoir complété les tableaux de Karnaugh de la figure 9, donner des expressions logiques simplifiées de ces six variables.

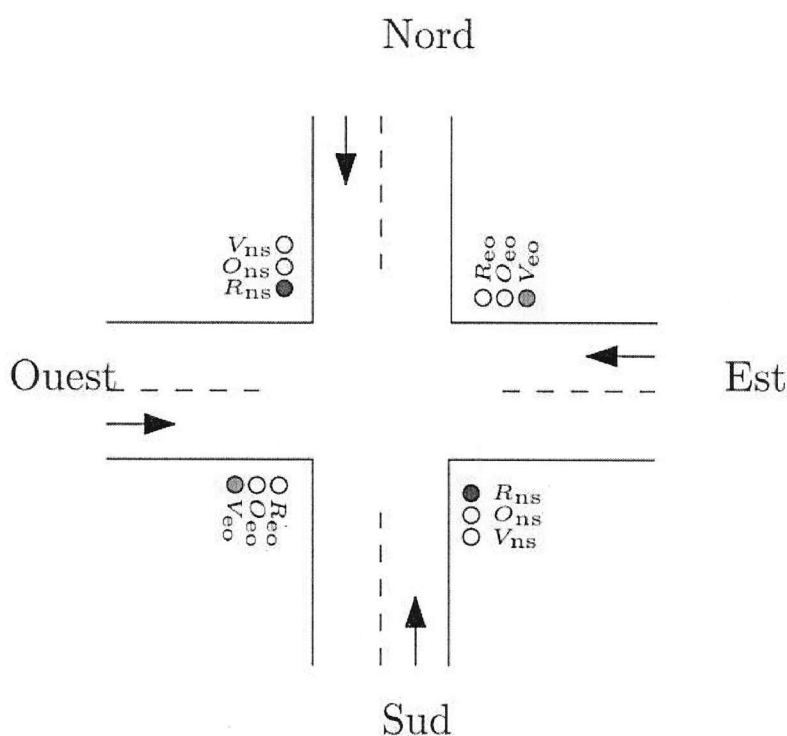


Figure 7: Feux de circulation d'un carrefour étudiés dans l'exercice 9, représentés ici pour une valeur de E comprise entre 9 et 13.

Combinatoire

1 à la fois!

1 à la fois
≠ de l'autre!

(9.2)

E	e ₃	e ₂	e ₁	e ₀	feux est-ouest	feux nord-sud	R _{eo}	O _{eo}	V _{eo}	R _{ns}	O _{ns}	V _{ns}
0	0	0	0	0	rouge	rouge	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	rouge	vert	1	0	0	0	0	1
2	0	0	1	0	rouge	vert	1	0	0	0	0	1
3	0	0	1	1	rouge	vert	1	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	rouge	vert	1	0	0	0	0	1
5	0	1	0	1	rouge	vert	1	0	0	0	0	1
6	0	1	1	0	rouge	orange	1	0	0	0	1	0
7	0	1	1	1	rouge	orange	1	0	0	0	1	0
8	1	0	0	0	rouge	rouge	1	0	0	1	0	0
9	1	0	0	1	vert	rouge	0	0	1	1	0	0
10	1	0	1	0	vert	rouge	0	0	1	1	0	0
11	1	0	1	1	vert	rouge	0	0	1	1	0	0
12	1	1	0	0	vert	rouge	0	0	1	1	0	0
13	1	1	0	1	vert	rouge	0	0	1	1	0	0
14	1	1	1	0	orange	rouge	0	1	0	1	0	0
15	1	1	1	1	orange	rouge	0	1	0	1	0	0

Figure 8: Tableau utilisé dans l'exercice 9.

R_{eo}	e₁ e₀				
e₃ e₂	00	01	11	10	
00	1	1	1	1	
01	1	1	1	1	
11					
10	1				

O_{eo}	e₁ e₀				
e₃ e₂	00	01	11	10	
00					
01					
11			1	1	
10					

V_{eo}	e₁ e₀				
e₃ e₂	00	01	11	10	
00					
01					
11	1	1			
10		1		1	

R_{ns}	e₁ e₀				
e₃ e₂	00	01	11	10	
00	1				
01					
11	1	1	1	1	
10	1	1	1	1	

O_{ns}	e₁ e₀				
e₃ e₂	00	01	11	10	
00					
01			1	1	
11					
10					

V_{ns}	e₁ e₀				
e₃ e₂	00	01	11	10	
00		1	1	1	
01	1	1			
11					
10					

Figure 9: Tableaux de Karnaugh utilisés dans l'exercice 9. On pourra n'indiquer que les cas où les fonctions valent 1.

1) Range: $9 \times 10 = 90s$ Vert: $5 \times 10 = 50s$ Orange $2 \times 10 = 20s$

2)
$$\begin{cases} R_{eo} = \bar{e}_3 + \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_0 \quad (\text{rouge et de +}) \\ O_{eo} = e_3 \cdot e_2 \cdot e_1 \\ V_{eo} = e_3 \cdot e_2 \cdot \bar{e}_1 + (e_3 \cdot \bar{e}_1 \cdot e_0) + e_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot e_1 \end{cases}$$

$$V_{eo} = e_3 \cdot e_2 \cdot \bar{e}_1 + (e_3 \cdot \bar{e}_1 \cdot e_0) + e_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot e_1$$

 (ou $e_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot e_0$) si $\bigcirc$

$$\begin{cases} R_{ns} = e_3 \cdot \bar{e}_2 + e_3 \cdot \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_0 \quad e_3 \\ O_{ns} = \bar{e}_3 \cdot e_2 \cdot e_1 \\ V_{ns} = \bar{e}_3 \cdot e_2 \cdot \bar{e}_1 + \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 \cdot e_0 + \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot e_1 \end{cases}$$

 ← au $\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot e_0$ si $\bigcirc$