combinatoire

Informatique d'Instrumentation

exercices sur la logique combinatoire

● ***Exercice 1:*** *En complétant le tableau ci-dessous, vérifier l'associativité de l'opération ET. En déduire deux réalisations possibles d'une fonction ET à trois entrées à l'aide de fonctions ET à deux entrées.*

x	y	z	$x \cdot y$	$(x \cdot y) \cdot z$	$y \cdot z$	$x \cdot (y \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

m̂ TV

même Table de Vérité (Truth Table)

→ identité des variables

la preuve la plus basique mais

parfois la plus rapide à faire...

combinatoire

● ***Exercice 2:*** *Montrer que pour obtenir la négation d'une variable logique x, on peut notamment*[1]

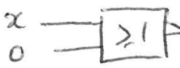
- *utiliser un opérateur* NON ET *à deux entrées, envoyer x sur une entrée et appliquer sur l'autre un niveau logique* 1 *;*
- *utiliser un opérateur* NON ET *à deux entrées et envoyer x sur les deux entrées ;*
- *utiliser un opérateur* NON OU *à deux entrées, envoyer x sur une entrée et appliquer sur l'autre un niveau logique* 0 *;*
- *utiliser un opérateur* NON OU *à deux entrées et envoyer x sur les deux entrées.*
- avec un OU EXC $y = 1$

[1]Source : B. Kainka, L. Gollub, "Électronique logique et numérique, mes premiers pas", Elektor-Publitronic, 2010.

$\overline{x \cdot 1} = \overline{x}$

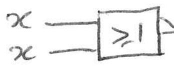
$\overline{x \cdot x} = \overline{x}$

$\begin{cases} x = 0 & 0 \cdot 0 = 0 \longrightarrow x = x \cdot x \\ x = 1 & 1 \cdot 1 = 1 \longrightarrow x = x \cdot x \end{cases}$



$\overline{x + 0} = \overline{x}$

propriétés de redondance



$\overline{x + x} = \overline{x}$

$\begin{cases} x = 0 & 0 + 0 = 0 & x = x + x \\ x = 1 & 1 + 1 = 1 & x = x + x \end{cases}$

$x \overline{1} + \overline{x} \cdot 1 = \overline{x}$ NON

● ***Exercice 3:*** Concevoir un premier circuit qui convertit un code binaire à 3 bits en un code Gray de même longueur, puis un autre qui fait l'inverse.

benaire			Gray		
b_2	b_1	b_0	g_2	g_1	g_0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

* g_2, c'est comme b_2

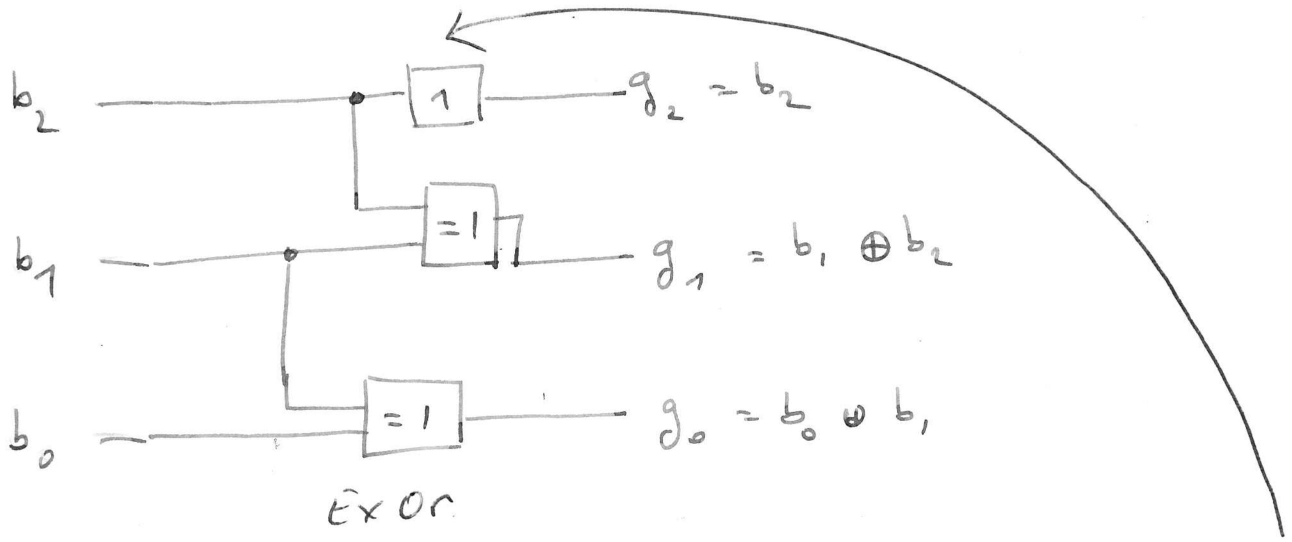
$$g_2 = b_2$$

* g_1, c'est comme b_1 lorsque $b_2 = 0$
et c'est comme $\bar{b}_1$ lorsque $b_2 = 1$

$$g_1 = b_1 \bar{b}_2 + \bar{b}_1 . b_2 = b_1 \oplus b_2$$

* g_0, c'est comme b_0 lorsque $b_1 = 0$
et c'est comme $\bar{b}_0$ lorsque $b_1 = 1$

$$g_0 = b_0 \bar{b}_1 + \bar{b}_0 . b_1 = b_0 \oplus b_1$$



cette porte "identité" s=e est là pour des raisons électriques : même comportement en U et I sur les 3 sorties

combinatoire

Gray (3 bits) $\longrightarrow$ binaires (3 bits)

	G			B		
	g_2	g_1	g_0	b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	0
5	1	1	1	1	0	1
6	1	0	1	1	1	0
7	1	0	0	1	1	1

$b_2 = g_2$

$b_1 = g_1$ qd $g_2 = 0$

$= \bar{g}_1$ qd $g_2 = 1$

$= g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2$

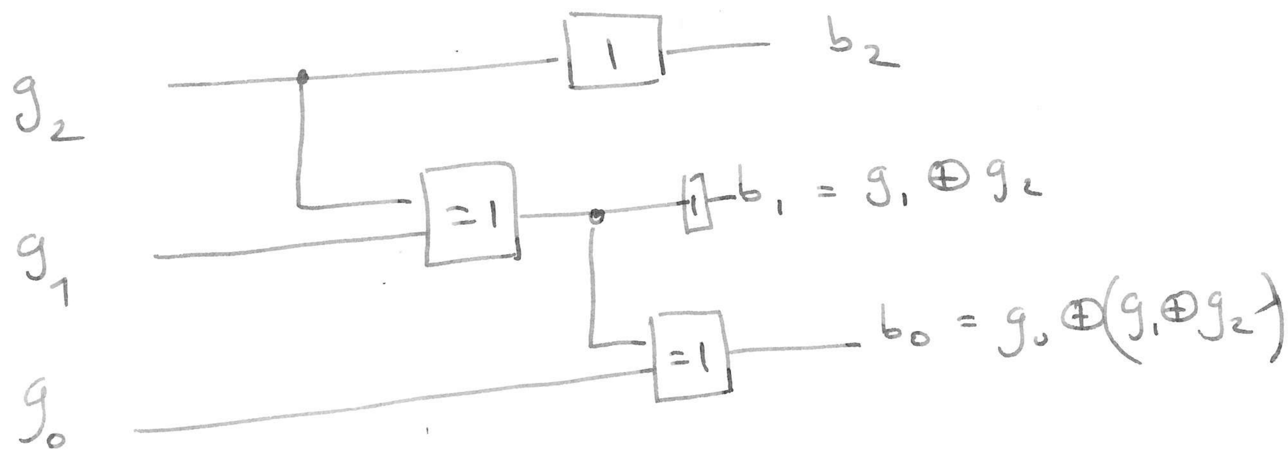
$b_1 = g_1 \oplus g_2$

$b_0 = g_0$ qd $g_1 = g_2$

$= \bar{g}_0$ $\quad g_1 = \bar{g}_2$

$$b_0 = g_0 \cdot \overline{g_1 \oplus g_2} + \bar{g}_0 \cdot (g_1 \oplus g_2)$$

$$= g_0 \oplus (g_1 \oplus g_2)$$



● ***Exercice 4:*** *À partir des variables logiques e_1 et e_2, on construit d'abord $s = e_1 \oplus e_2$, puis $s \oplus e_1$, $s \oplus \overline{e_1}$, $s \oplus e_2$ et $s \oplus \overline{e_2}$.*

1. *À l'aide du tableau de la figure 1, simplifier les expressions des quatre dernières expressions logiques.*
2. *Retrouver ensuite ces résultats par des calculs algébriques.*
3. *En déduire les expressions des variables logiques s_1 et s_2 du circuit de la figure 2.*

1)

e_1	e_2	s	$s \oplus e_1$	$s \oplus \overline{e_1}$	$s \oplus e_2$	$s \oplus \overline{e_2}$
0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0
			$= e_2$	$= \overline{e_2}$	$= e_1$	$= \overline{e_1}$

Figure 1: tableau utilisé dans l'exercice 4.

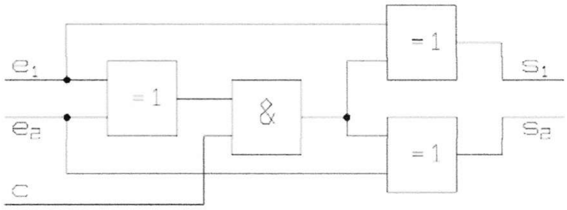


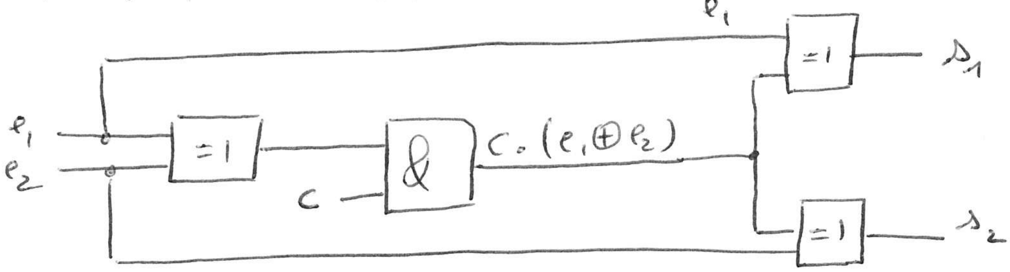
Figure 2: circuit étudié dans l'exercice 4.

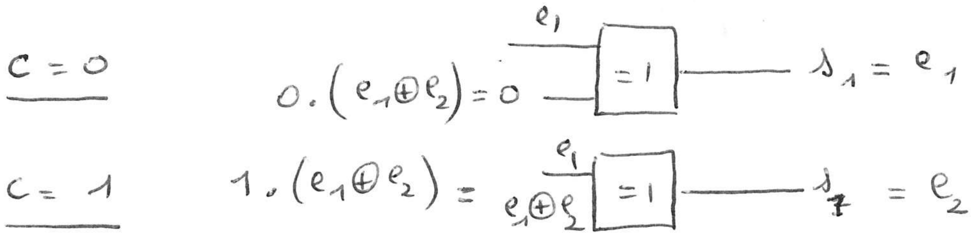
2) $(e_1 \oplus e_2) \oplus e_1 = (e_2 \oplus e_1) \oplus e_1 = e_2 \oplus (e_1 \oplus e_1) = e_2 \oplus 0 = e_2$

$(e_1 \oplus e_2) \oplus \overline{e_1} = (e_2 \oplus e_1) \oplus \overline{e_1} = e_2 \oplus (e_1 \oplus \overline{e_1}) = e_2 \oplus 1 = \overline{e_2}$

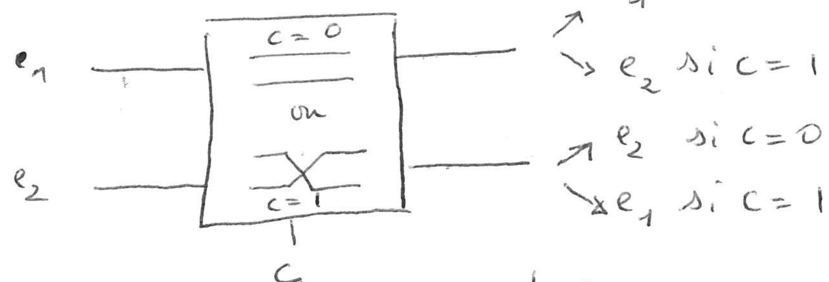
idem avec $1 \leftrightarrow 2$

3)





$s_2 = e_1 \oplus (e_1 \oplus e_2) = e_2$



bit de commande c

$\{$ identité si $c=0$, croisement (switch) si $c=1$

cet opérateur permet d'intervertir ou non 2 flux de signaux numérique : ~~[illegible]~~

● ***Exercice 5:*** *A l'aide des théorèmes précédents, vérifier que le circuit de la figure 3 est équivalent à une opération OU EXCLUSIF. Quelle information indique la sortie s du circuit de la figure 4 ? Quelles informations indiquent les sorties g et l ?*

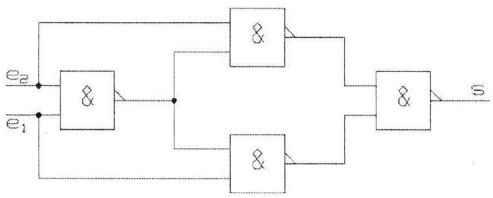


Figure 3: Réalisation d'une fonction OU EXCLUSIF à l'aide de circuits NON ET à deux entrées (voir exercice 5).

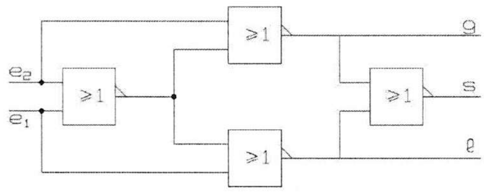
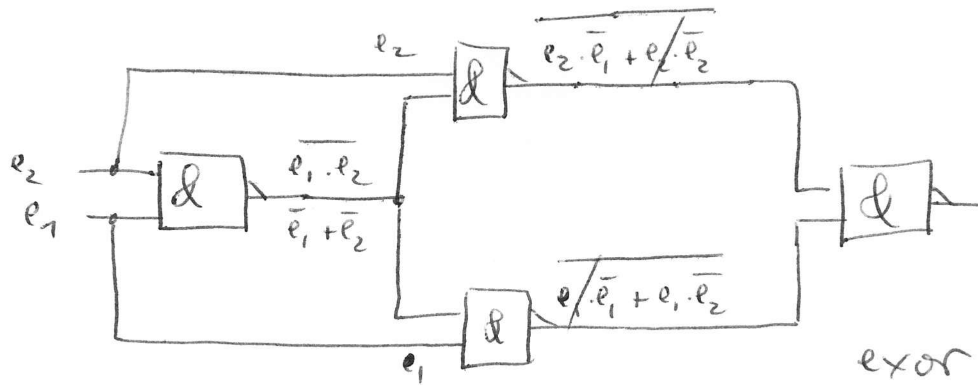


Figure 4: Circuit obtenu en remplaçant dans la figure 3 les circuits NON ET par des circuits NON OU (voir exercice 5).



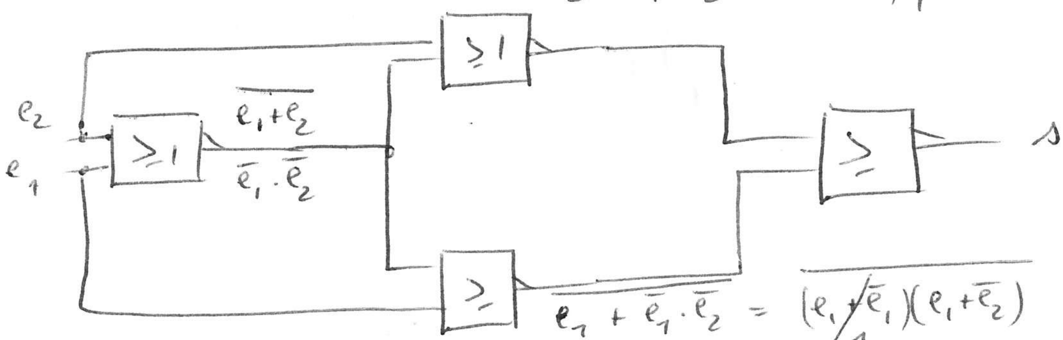
$$\overline{\overline{(e_1 \cdot \bar e_2)} \cdot \overline{(\bar e_1 \cdot e_2)}}$$

$$\overline{\overline{e_1 \cdot \bar e_2}} + \overline{\overline{\bar e_1 \cdot e_2}}$$

$$e_1 \cdot \bar e_2 + \bar e_1 \cdot e_2$$

exor $\quad e_1 \oplus e_2$

$$\overline{e_2 + \bar e_1 \cdot \bar e_2} = \overline{(\bar e_1 + e_2) \cdot \underbrace{(e_2 + \bar e_2)}_{1}} = \overline{\bar e_1 + e_2}$$



$$\overline{e_1 + \bar e_1 \cdot \bar e_2} = \overline{\underbrace{(e_1 + \bar e_1)}_{1}(e_1 + \bar e_2)}$$

$$s = \overline{\overline{\bar e_1 + e_2} + \overline{e_1 + \bar e_2}} = \overline{\overline{\bar e_1 + e_2}} \cdot \overline{\overline{e_1 + \bar e_2}}$$

$$s = (\bar e_1 + e_2) \cdot (e_1 + \bar e_2)$$ Th de Shannon.

$$s = \overline{e_1 \cdot \bar e_2 + \bar e_1 \cdot e_2} = \overline{e_1 \oplus e_2} = e_1 \otimes e_2$$

Exnor ou Non Ou Exclusif