

## Informatique d'Instrumentation

### exercices sur le codage des nombres

● **Exercice 1:** A quelle valeur correspond la représentation décimale 617 ? Quel est le plus grand nombre ayant une représentation décimale à  $n$  chiffres ? À l'inverse, quel est le nombre de chiffres de la représentation décimale d'un nombre entier naturel  $x$  ?

$$\begin{aligned}
 617 &= 6 \times 100 + 1 \times 10 + 7 \times 1 \\
 &\quad \text{six} \quad \text{centaines} \quad \text{une dizaine} \quad \text{sept unités} \\
 &= 6 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \\
 &\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 &\quad \quad \text{poids 2} \quad \quad \text{poids 1} \quad \quad \text{poids 0}
 \end{aligned}$$

Bien insister auprès des étudiants sur le fait que cette représentation sur les puissances successives de 10 leur est habituelle, mais qu'elle correspond à un choix arbitraire, qui n'est donc pas le seul possible. Par la suite on choisira  $B=2$  et  $B=16$ .

|                                           |         |
|-------------------------------------------|---------|
| Avec un chiffre, on peut compter de 1 à 9 |         |
| deux chiffres,                            | 1 à 99  |
| trois chiffres                            | 1 à 999 |

Avec  $n$  chiffres, on peut compter de 1 à  $\underbrace{999 \dots 99}_{n \text{ chiffres "9"}}$

Donc le plus grand nombre à  $n$  chiffres est

$$\underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ chiffres "9"}} = \underbrace{1000 \dots 0}_{n+1 \text{ chiffres "0"}} - 1 = 10^n - 1$$

$n+1$  chiffres en tout

Donc si

$$\begin{aligned}
 1 \leq x \leq 9 &\rightarrow 1 \text{ chiffre} \\
 10 \leq x \leq 99 &\rightarrow 2 \text{ chiffres} \\
 100 \leq x \leq 999 &\rightarrow 3 \text{ chiffres}
 \end{aligned}$$

Donc un nombre à  $n$  chiffres est compris entre

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{10 \dots 0}_{n-1 \text{ chiffres } 0} & \leq x \leq & \underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ chiffres "9"}}
 \end{array}$$

$$\text{soit } 10^{n-1} \leq x < 10^n$$

↑ inégalité stricte

$$\text{soit } (n-1) \lg(10) \leq \lg(x) < n \lg(10)$$

$$n-1 \leq \frac{\lg(x)}{\lg(10)} < n$$

Donc  $n$  correspond à l'entier immédiatement supérieur

$$\text{à } \frac{\lg(x)}{\lg(10)}$$

$$n = \left\lceil \lg_{10}(x) \right\rceil + 1$$

↑  
logarithme en base 10

↑  
partie entière

Par exemple  $x=617$   $\lg_{10}(x)=2,79$   $n=3$

Cet exercice, et les suivants, a pour objectif de montrer aux étudiants la notion de compacité d'une représentation : plus la base est grande moins le nombre de chiffres nécessaire pour représenter un nombre est important.

2. \* Représentation décimale de ?

$$\begin{array}{cccccccc} (1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1) \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 512 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{array} = 512 + 64 + 32 + 8 + 1 = (617)_{10}$$

exercice supplémentaire

$$\begin{array}{r} (101111001)_2 = 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 \\ \begin{array}{r} 512 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 1 \\ 761 \end{array} \\ \hline = (761)_{10} \end{array}$$

\* Quel est le + grand nombre avec une représentation binaire à  $n$  chiffres?  
Avec  $n$  chiffres on peut compter de 1 à  $2^n$  chiffres?

$$\frac{\underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ chiffres}}}{1} = \underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ chiffres } 0} = 2^n - 1$$

\* quel est le nombre de chiffres de la représentation binaire de  $(x)_2$  ?  
De même, un nombre entier naturel dont la représentation binaire comporte  $n$  chiffres est compris entre

$$\left( \frac{1000 \dots 0}{n-1 \text{ zeroes}} \right)_2 \leq x \leq \left( \frac{1000 \dots 0}{n \text{ zeroes}} \right)_2$$

$$2^{n-1} \leq x \leq 2^n$$

donc  $(n-1) \lg(2) \leq \lg(x) \leq n \lg(2)$

$$n-1 \leq \frac{\log(x)}{\log(2)} < n$$

$$n = E\left(\frac{\log(x)}{\log(2)}\right) + 1$$

example:  $x = 617$   $\frac{\log(x)}{\log(2)} = 9,27 \rightarrow 10$  chiffres

## Informatique d'Instrumentation

### exercices sur le codage des nombres

● **Exercice 1:** A quelle valeur correspond la représentation décimale 617 ? Quel est le plus grand nombre ayant une représentation décimale à  $n$  chiffres ? À l'inverse, quel est le nombre de chiffres de la représentation décimale d'un nombre entier naturel  $x$  ?

● **Exercice 2:** Quelle est la représentation décimale des nombres  $(1001101001)_2$  et  $(1011111001)_2$  ? Quel est le plus grand nombre ayant une représentation binaire à  $n$  chiffres ? Quel est le nombre de chiffres de la représentation binaire d'un nombre entier naturel  $x$  ?

● **Exercice 3:** Quel est le plus grand entier naturel codé en binaire sur 8 bits ? sur 12 bits ? sur 16 bits ?

|             |             |               |
|-------------|-------------|---------------|
| $n = 1$ bit | 0 ou 1      | $2^1 - 1 = 1$ |
| 2 bits      | 00 01 10 11 | $2^2 - 1 = 3$ |
| 3 bits      | 000 01 111  | $2^3 - 1 = 7$ |

→  $n$  bits  $2^n - 1$

|       |          |                      |
|-------|----------|----------------------|
| octet | $n = 8$  | $2^8 - 1 = 255$      |
|       | $n = 12$ | $2^{12} - 1 = 4095$  |
|       | $n = 16$ | $2^{16} - 1 = 65535$ |

les 4 couleurs  
de MS Paint...

● **Exercice 4:** La norme MIDI (Musical Instrument Digital Interface) est un protocole de communication et de commande permettant l'échange de données entre instruments de musique électronique<sup>1</sup>. Au sein de cette norme, le système MTS (MIDI tuning standard) code la hauteur (ou fréquence)  $f$  de chaque note par le nombre entier naturel  $N$  codé en représentation binaire naturelle sur 7 bits. Ce nombre est obtenu par la relation<sup>2</sup>

$$f = 440 \times 2^{(N-69)/12} \quad \text{soit} \quad N = 69 + 12 \text{lb}(f/440)$$

où  $\text{lb}(x) = \log_2(x) = \ln(x)/\ln(2)$  est la fonction logarithme de base 2.

1. Quelle est la plus petite valeur de  $N$  ? À quelle fréquence correspond-elle ?
2. Quelle est la plus grande valeur de  $N$  ? À quelle fréquence correspond-elle ?
3. Quel est le code binaire des notes de fréquence 392 et 880 Hz ?

<sup>1</sup>Voir [http://fr.wikipedia.org/wiki/Musical\\_Instrument\\_Digital\\_Interface](http://fr.wikipedia.org/wiki/Musical_Instrument_Digital_Interface) ainsi que [http://en.wikipedia.org/wiki/MIDI\\_Tuning\\_Standard](http://en.wikipedia.org/wiki/MIDI_Tuning_Standard)

• 440 Hz La3 2-basée sur la gamme tempérée pour laquelle 1/2 ton chromatique vaut  $\frac{12}{12}$

•  $N_{\min}$  sur 7 bits : 0

$$f_0 = 440 \times 2^{(0-69)/12} = 440 \times 2^{-5,75} = 440 \times 0,01858 = 8,18 \text{ Hz}$$

•  $N_{\max}$  sur 7 bits  $(1111111)_2 = 2^7 - 1 = 127$

$$f_{127} = 440 \times 2^{(127-69)/12} = 440 \times 2^{4,833} = 440 \times 28,50875 = 12543,8 \text{ Hz}$$

•  $\begin{cases} 392 \text{ Hz} \\ \uparrow \\ \text{sol3} \end{cases} \rightarrow N = 69 + 12 \frac{\text{lb}(392/440)}{\text{lb} 2} = 67,002$

$$f_{67} = 440 \times 2^{(67-69)/12} = 391,995 \text{ Hz}$$

•  $\begin{cases} 880 \text{ Hz} \\ \text{La4} \end{cases} \rightarrow N' = 69 + 12 \frac{\text{lb} 2}{\text{lb} 2} = 69 + 12 = 81$

$2 \times 440 \rightarrow$  octave La4

Rem  $\begin{cases} \text{do 0} \rightarrow 32,70 \text{ Hz} \\ \text{sol 6} \rightarrow 3135,9 \text{ Hz} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8,18 \text{ Hz} \\ 12543 \end{cases}$  2 octaves + grave que le do grave du piano  
2 octave + aigu que le sol aigu du piano

● **Exercice 5:** Avec les heures et minutes indiquées par votre montre, vous pouvez former un nombre à trois ou quatre chiffres. Par exemple, si il est 8<sup>h</sup> 52, le nombre obtenu est 852. Réalisez ensuite la conversion de ce nombre en hexadécimal et en binaire.

$$8^h 52 \rightarrow 852$$

$$(852)_{10} = 16^2 \times 3 + 16 \times 5 + 4 = 256 \times 3 + 80 + 4 = 768 + 80 + 4$$

$$(354)_{16}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{852}{16} = 53,25 & 53 \times 16 = 848 \rightarrow 4 \\ \frac{53}{16} = 3,31 & 16 \times 3 = 48 \rightarrow 53 - 48 = 5 \end{array} \right. \quad (354)_{16}$$

③

$$(354)_{16} = \left( \underbrace{0011}_3 \underbrace{0101}_5 \underbrace{0100}_4 \right)_2$$